GRAHA ILMU

METODE GRAFIK DAN SIMPLEKS

Dalam Penyelesaian Masalah Program Linear

Gregoria Ariyanti

METODE GRAFIK DAN SIMPLEKS

Dalam Penyelesaian Masalah Program Linear

METODE GRAFIK DAN SIMPLEKS

Dalam Penyelesaian Masalah Program Linear

Gregoria Ariyanti

GRAHA ILMU

METODE GRAFIK DAN SIMPLEKS; Dalam Penyelesaian Masalah Program Linear

oleh Gregoria Ariyanti

Edisi Pertama; Cetakan Pertama ~ 2021

GRAHA ILMU

Ruko Jambusari 7A Yogyakarta 55283
Telp: 0274-889398; 0274-882262; email: info@grahailmu.co.id

e-ISBN: 978-623-228-845-4

DATA BUKU:
Format: 17 x 24 cm; Jml. Hal.: viii + 70; Kertas Isi: HVS 70 gram; Tinta Isi: BW/Colour; Kertas Cover: Ivori 260 gram; Tinta Cover: Colour; Finishing: Perfect Binding: Laminasi Doff.

KATA PENGANTAR

Program linear merupakan suatu teknik optimalisasi dengan variabel-variabelnya linear. Program Linear atau optimalisasi dipakai saat dihadapkan pada permasalahan dengan suatu pengambilan keputusan yang memiliki beberapa pilihan dengan batasan-batasan atau kendala tertentu dan menghendaki keputusan yang optimum (maksimum/minimum). Program linear berkaitan dengan penjelasan suatu kasus dalam dunia nyata yang dibawa ke model matematika yang terdiri dari sebuah fungsi tujuan linear dengan beberapa kendala linear. Program linear meliputi perencanaan aktivitas untuk mendapatkan hasil optimal, yaitu sebuah hasil yang mencapai tujuan terbaik menurut model matematika.

Buku ini mengulas penyelesaian permasalahan Program Linear yang meliputi Metode Grafik dan Metode Simpleks sertaDualitas. Diharapkan pembaca memahami beberapa bentuk permasalahan dan strategi penyelesaian permasalahan dalam Program Linear serta dapat memanfaatkannya untuk menyelesaikan masalah yang sederhana dalam kehidupan sehari-hari, mampu berpikir logis dan bernalar secara matematika dalam menyelesaikan masalah.

Madiun, April 2020

Penulis,

Gregoria Ariyanti

DAFTAR ISI

-oo0oo-

1

FORMULASI MASALAH, PEMODELAN DAN METODE GRAFIK

1.1 FORMULASI MASALAH DAN PEMODELAN PROGRAM LINEAR

Program Linear merupakan suatu model umum yang dapat digunakan dalam pemecahan masalah terkait pengalokasian sumber-sumber yang terbatas secara optimal. Program Linear (*Linear Programming*) dikenal dalam beberapa bidang ilmu. Dalam ekonomi, Program Linear adalah suatu teknis matematika yang dirancang untuk membantu manajer dalam merencanakan dan membuat keputusan untuk mengalokasikan sumber daya yang terbatas untuk mencapai tujuan perusahaan. Tujuan perusahaan pada umumnya adalah memaksimalisasi keuntungan, namun karena terbatasnya sumber daya, maka dapat juga perusahaan meminimalkan biaya.

Program Linear memiliki empat ciri khusus, yaitu:

1. penyelesaian masalah mengarah pada pencapaian tujuan maksimalisasi atau minimalisasi
2. kendala yang ada membatasi tingkat pencapaian tujuan
3. ada beberapa alternatif penyelesaian
4. hubungan matematis bersifat linear

Contoh 1.1:

Bagian produksi dalam suatu perusahaan dihadapkan pada masalah penentuan tingkat produksi masing-masing jenis produk. Penentuan tingkat produksi tersebut mempertimbangkan batasan faktor-faktor produksi seperti mesin, tenaga kerja, bahan mentah, dan lain sebagainya untuk memperoleh tingkat keuntungan maksimal atau biaya yang minimal.

Model Program Linear meliputi dua bagian utama, yaitu:

1. Fungsi tujuan (*objective function*).
   Fungsi yang menggambarkan *tujuan/sasaran* di dalam permasalahan Program Linear yang berkaitan dengan pengaturan secara optimal sumber daya–sumber daya, untuk memperoleh keuntungan maksimal atau biaya minimal.
2. Fungsi-fungsi batasan (constraint functions).
   Merupakan bentuk penyajian secara matematis *batasan-batasan kapasitas* yang tersedia yang akan dialokasikan secara optimal ke berbagai kegiatan.

   (https://repository.unikom.ac.id/31151/1/Materi%201.pdf)

Berikut ini beberapa unsur-unsur yang diperlukan dalam masalah Program Linear dan disajikan dalam tabel berikut.

Aktifitas Sumber	**Penggunaan Sumber/Unit**				**Banyaknya Sumber yang Dapat Digunakan**
	1	2	...	N	
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
ΔZ / Unit	c_1	c_2	...	c_n	
Tingkat	x_1	x_2	...	x_n	

Gambar 1.1. *Tabel Data untuk Model Program Linear*

Atas dasar Tabel 1.1 di atas, dapat disusun suatu model matematis yang digunakan untuk mengemukakan suatu permasalahan Program Linear sebagai berikut:

Fungsi tujuan: Maksimumkan $Z = c_1x_1 + cx_2 + \ldots + c_nx_n$.

Berdasarkan batasan-batasan:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

dan

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

Formulasi di atas dinamakan *bentuk standar* atau *baku* dari persoalan Program Linear. Terminologi umum untuk model di atas dijelaskan sebagai berikut:

1. Fungsi yang akan *dimaksimumkan* yaitu:
   $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$
   yang disebut sebagai *fungsi tujuan.*
2. *Fungsi-fungsi batasan* yang dapat dikelompokkan menjadi 2 macam yaitu:
   a. *Fungsi batasan fungsional* yaitu fungsi batasan sebanyak m, yaitu $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_n$.
   b. Fungsi batasan non negatif ($x_i \geq 0$).
3. Variabel x_j sebagai variabel keputusan.
4. Konstanta-konstanta a_{ij}, b_i dan c_j sebagai parameter-parameter model.

Tidak semua masalah Program Linear secara sama mengikuti model di atas. Model Program Linear dengan bentuk yang sedikit berbeda dengan model di atas adalah sebagai berikut:

1. Fungsi tujuan bukan memaksimumkan melainkan *meminimumkan.*
   Contoh: meminimumkan $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$.

2. Permasalahan dengan fungsi batasan fungsional yang memiliki *tanda matematis "≥" (lebih dari atau sama dengan).*
   Contoh: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$
3. Permasalahan dengan fungsi batasan fungsional yang memiliki *tanda matematis = (sama dengan).*
   Contoh: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$.
4. Permasalahan tertentu, dimana fungsi batasan non negatif tidak diperlukan atau dengan kata lain *x_j tidak terbatas.*

Secara teknis, ada lima syarat tambahan dari permasalahan Program Linear yang merupakan asumsi dasar, yaitu:

1. *Certainty* (kepastian). Maksudnya adalah fungsi tujuan dan fungsi kendala sudah diketahui dengan pasti dan tidak berubah selama periode analisa.
2. *Proportionality* (proporsionalitas). Yaitu adanya proporsionalitas dalam fungsi tujuan dan fungsi kendala.
3. *Additivity* (penambahan). Artinya aktivitas total sama dengan penjumlahan aktivitas individu.
4. *Divisibility* (bisa dibagi-bagi). Maksudnya solusi tidak harus merupakan bilangan integer (bilangan bulat), tetapi bisa juga berupa pecahan.
5. *Non-negative variable* (variabel tidak negatif). Artinya bahwa semua nilai jawaban atau variabel tidak negatif.

Asumsi-asumsi dalam model Program Linear dapat dijelaskan sebagai berikut:

1. *Proportionality* (kesebandingan).
   a. $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$
      Setiap pertambahan 1 unit x_1 akan menaikkan z dengan c_1.
      Setiap pertambahan 1 unit x_2 akan menaikkan z dengan c_2, dan seterusnya.
   b. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$
      Setiap pertambahan 1 unit x_1 akan menaikkan penggunaan sumber/fasilitas 1 dengan a_{11}.

Setiap pertambahan 1 unit x_2 akan menaikkan penggunaan sumber/fasilitas 1 dengan a_{12}, dan seterusnya.

Dengan kata lain, setiap ada kenaikan kapasitas riil, tidak perlu ada biaya persiapan atau *set up cost*.

2. *Additivity*
   Nilai tujuan tiap kegiatan *tidak saling mempengaruhi* atau dalam Program Linear dianggap bahwa kenaikan nilai tujuan (z) yang diakibatkan kenaikan suatu kegiatan dapat ditambahkan tanpa mempengaruhi bagian nilai z yang diperoleh dari kegiatan lain.
3. *Divisibility*
   Keluaran (*output*) yang dihasilkan oleh setiap kegiatan dapat berupa bilangan *pecahan*.
4. *Deterministic (certainty).*
   Semua parameter yang terdapat dalam model Program Linear (a_{ij}, b_i, c_j) dapat diperkirakan dengan pasti meskipun jarang dengan tepat.

Contoh Permasalahan:

Sebuah perusahaan elektronik memproduksi tape recorder dan amplifier yang prosesnya dilakukan di 2 stasiun kerja, yaitu perakitan dan pengetesan. Setiap unit tape recorder memerlukan 2 jam perakitan dan 2 jam pengetesan, sedangkan setiap unit amplifier memerlukan 4 jam perakitan dan 3 jam pengetesan. Waktu yang tersedia di bagian perakitan adalah 72 jam/minggu sedangkan di bagian pengetesan adalah 48 jam /minggu. Kontribusi profit dari tape recorder adalah Rp. 250.000,-/unit, dan dari setiap unit amplifier adalah Rp. 500.000,-.

Bagaimanakah formulasi persoalan di atas agar dapat ditentukan strategi produksi terbaik yang memberikan kontribusi profit maksimum?

Penyelesaian:

Proses \ Produk	Waktu yang digunakan		Waktu yang tersedia
	Tape	Amplifier	
Perakitan	2	4	72
Pengetesan	2	3	48
Keuntungan	250.000	500.000	

Gambar 1.2. *Tabel Data Waktu yang Digunakan*

Berikut ini keterangan dari Tabel 1.2.
Variabel keputusan:

x_1 = Jumlah tape recorder yang diproduksi
x_2 = Jumlah amplifier yang diproduksi

Fungsi tujuan:

Maksimumkan $z = 250.000x_1 + 500.000x_2$

Fungsi pembatas atau kendala:

1. $2x_1 + 4x_2 \leq 72$
2. $2x_1 + 3x_2 \leq 48$

Fungsi pembatas atau kendala non negatif:

$x_1, x_2 \geq 0$

Jadi formulasi lengkap persoalan di atas adalah sebagai berikut:
Maksimumkan $z = 250.000x_1 + 500.000x_2$
Berdasarkan pembatas:

$2x_1 + 4x_2 \leq 72$

$2x_1 + 3x_2 \leq 48$

$x_1, x_2 \geq 0$

1.2 PROGRAM LINEAR DENGAN METODE GRAFIK

Dalam menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan Program Linear, ada dua pendekatan yang bisa digunakan, yaitu metode grafik dan metode simpleks. Metode grafik hanya bisa digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dimana variabel keputusan sama dengan dua.

Dalam bagian ini akan dijelaskan Program Linear dengan metode grafik untuk fungsi tujuan baik maksimum maupun minimum. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, langkah pertama yang harus dilakukan adalah memformulasikan permasalahan yang ada ke dalam bentuk Program Linear. Langkah-langkah dalam formulasi permasalahan adalah:

1. Formulasikan masalah Program Linear.
2. Gambarkan dalam bentuk grafik.
3. Tentukan titik ekstrim.
4. Hitung nilai ekstrim berdasarkan syarat-syarat yang diberikan.

Langkah pertama dalam penyelesaian dengan metode grafik adalah menggambarkan fungsi kendalanya. Untuk menggambarkan kendala pertama secara grafik, sebelumnya dengan mengubah tanda pertidak-samaan menjadi tanda persamaan. Sebagaimana halnya yang sudah dipelajari dalam aljabar, bahwa untuk menggambarkan fungsi linear yang tidak lain merupakan garis lurus, maka terlebih dulu dengan mencari titik potong garis tersebut dengan kedua sumbu. Suatu garis akan memotong salah satu sumbu apabila nilai variabel yang lain sama dengan nol.

Setelah tahap ini dilakukan terhadap semua fungsi kendala, maka diperoleh suatu daerah yang memenuhi semua fungsi kendala yang disebut dengan Daerah Layak. Ciri–ciri Daerah Layak adalah sebagai berikut:

1. Setiap kendala pada fungsi kendala menghasilkan suatu bidang tertutup yang konveks.
2. Pasangan (x, y) yang memenuhi semua kendala disebut penyelesaian layak.
3. Titik wakilnya dalam bidang koordinat disebut titik layak.
4. Himpunan titik layak disebut daerah layak.

Untuk menentukan penyelesaian yang optimal, dapat digunakan dengan cara menggunakan Garis Selidik. Penyelesaian dengan menggunakan garis selidik adalah penyelesaian dengan menggambarkan fungsi tujuan. Kemudian fungsi tujuan tersebut digeser ke kanan sampai menyinggung titik terjauh dari titik nol, tetapi masih berada pada area layak (*feasible region*). Untuk menggambarkan garis selidik, dengan cara mengganti nilai Z dengan sembarang nilai yang mudah dibagi oleh koefisien pada fungsi tujuan tersebut.

Uraian tentang Garis Selidik adalah sebagai berikut:

1. Garis selidik adalah suatu garis-garis yang sejajar (garis-garis senilai) dengan garis $ax + by = k$ yang berfungsi menyelidiki atau menentukan nilai fungsi tujuan maksimum atau minimum.
2. Dua atau tiga garis senilai yang dilukis diperlukan guna menyelidiki kemiringan garis senilai dan arah membesarnya (arah pergeserannya)
3. Dua atau ketiga garis senilai secara bersama-sama disebut garis selidik. Dengan demikian untuk dua nilai k atau lebih, garis senilai disebut garis selidik. Atau garis senilai disebut garis selidik jika minimal terdapat dua garis senilai.

Setelah tahap menggunakan garis selidik dilakukan, akan diperoleh Penyelesaian Optimum. Uraian tentang Penyelesaian Optimum adalah sebagai berikut:

1. Penyelesaian optimum adalah penyelesaian layak yang memaksimumkan atau meminimumkan nilai Z atau f.
2. Secara gambar, berarti mencari titik anggota daerah layak (F) yang membuat nilai Z atau f sebesar/sekecil mungkin, dan disebut titik optimum.

Contoh Permasalahan:

Sekelompok petani mendapatkan 6 ha tanah yang dapat ditanami padi, jagung dan palawija lain. Karena keterbatasan sumber daya petani harus menentukan berapa bagian yang harus ditanami padi dan berapa yang harus ditanami jagung, sedangkan palawija lain ternyata tidak menguntungkan. Dalam satu masa tanam tenaga yang tersedia hanya 1590 jam-orang, pupuk tidak lebih dari 480 kg, sedangkan air dan sumber daya lain dianggap cukup tersedia.

Diketahui bahwa untuk menghasilkan 1 kwintal padi diperlukan 12 jam-orang tenaga dan 4 kg pupuk, dan untuk 1 kwintal jagung diperlukan 9 jam-orang tenaga dan 2 kg pupuk. Kondisi tanah memungkinkan menghasilkan 50 kw padi per ha atau 20 kw jagung per ha.

Pendapatan dari 1 kw padi Rp. 320.000 dan dari 1 kw jagung Rp. 200.000 dan dianggap semua hasil tanamnya selalu habis terjual.

Masalah bagi petani adalah bagaimanakah rencana (program) produksi yang memaksimumkan pendapatan total ?

Artinya, berapa ha tanah ditanami padi dan berapa yang ditanami jagung.

Penyelesaian:

Berikut diberikan Tabel produksi tani.

	Per kwintal			
Sumber	**Padi**	**Jagung**	**Batas Sumber**	**Satuan**
Tanah	0,02	0,05	6	Ha
Tenaga	12	9	1590	Jam-orang
Pupuk	4	2	480	Kg
Pendapatan	32	20		Rp. 10,000

Gambar 1.3. *Tabel Produk Tani*

Catatan:

1. Satuan jam-orang adalah banyaknya orang kali banyak jam berkerja
2. Air dianggap berlimpah sehingga tidak menjadi kendala.
3. Batas sumber dalam soal berupa batas atas.
   Misalkan:

      x: banyak kwintal padi yang diproduksi
      y: banyak kwintal jagung yang diproduksi

Menentukan x dan y yang memenuhi:

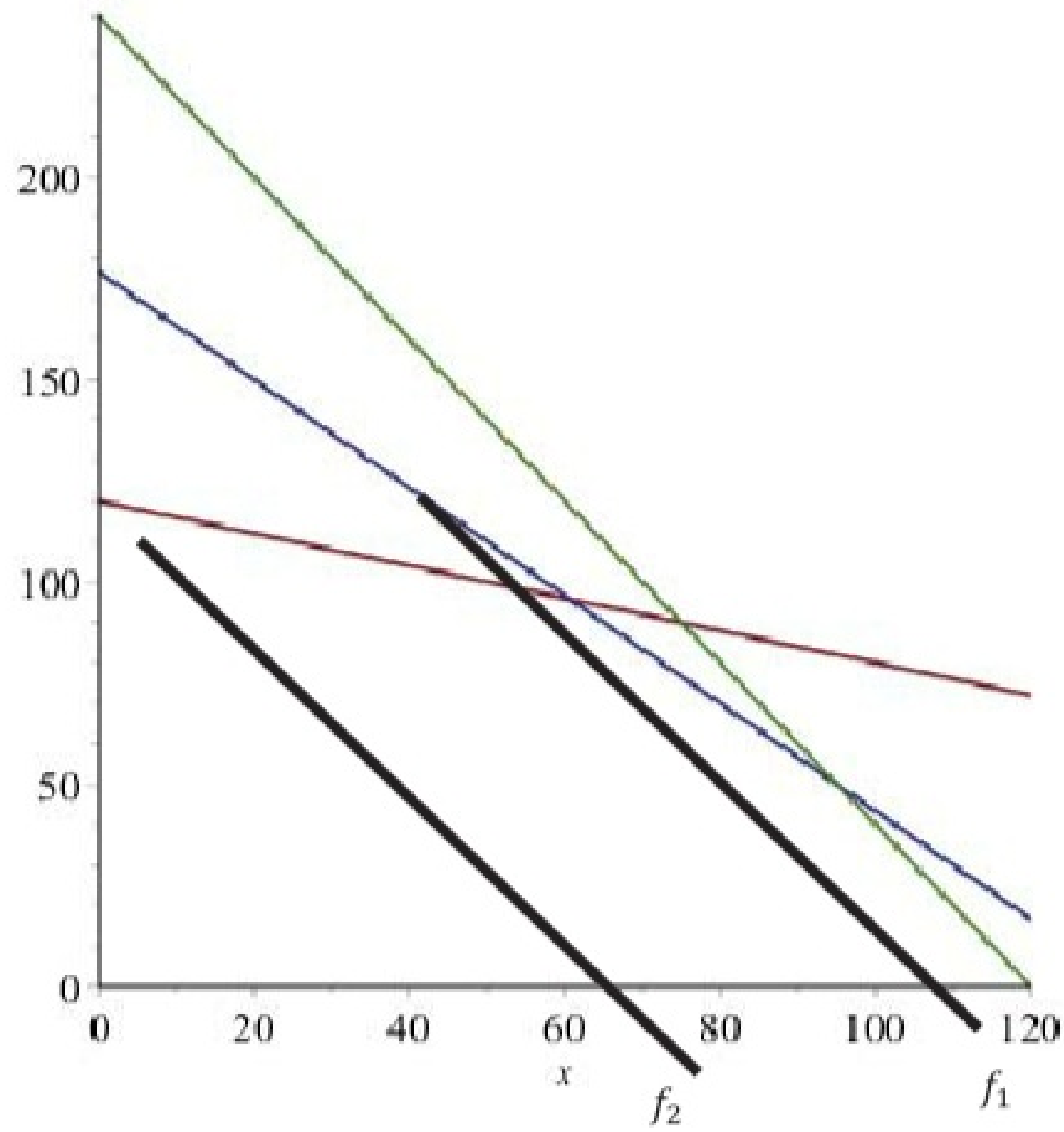
$2x + 5y \leq 600$ (1)

$4x + 3y \leq 530$ (2)

$2x + y \leq 240$ (3)

$x \geq 0, y \geq 0$ (4)

Dan memaksimumkan $f = 32x + 20y$.



Gambar 1.4. *Grafik Permasalahan Produk Tani*

Penafsiran kembali berdasarkan Gambar 1.4. sebagai berikut:

Penyelesaian optimum berbunyi: untuk memaksimumkan pendapatan total maka sebaiknya diproduksi 95 kwintal padi dan 50 kwintal jagung, yaitu perpotongan (2) dan (3).

Ini berarti bahwa luas tanah untuk menanam padi 1,9 ha dan jagung 2,5 ha dan diperoleh pendapatan maksimum Rp. 40.400.000.

Dari kendala utama tampak bahwa tanah masih bersisa 1.6 ha, sedangkan tenaga dan pupuk habis terpakai.

Kendala tenaga dan pupuk disebut kendala yang membatasi (*restrictive*) dan kendala tanah tidak membatasi.

Contoh Permasalahan:

Suatu pabrik farmasi menghasilkan dua macam kapsul obat flu yang diberi nama Fluin dan Fluon. Masing-masing memuat tiga unsur (*ingredient*) utama dengan kadar kandungan tertera dalam tabel di bawah. Menurut dokter, seseorang yang sakit flu biasa akan sembuh bila dalam tiga hari (secara diratakan) minimum menelan 12 grain aspirin, 74 grain bikarbonat dan 24 grain kodein.

Bila harga Fluin Rp. 20.000 dan Fluon Rp. 30.000 per kapsul, bagaimana rencana (program) pembelian seorang pasien flu (artinya berapa kapsul Fluin dan berapa kapsul Fluon harus dibeli) supaya cukup untuk menyembuhkan dan meminimumkan ongkos pembelian total.

Kandungan unsur disajikan dalam tabel berikut:

Unsur	x	y	Batas Minimal
	Fluin	Fluon	
Aspirin	2	1	12
Bikarbonat	5	8	74
Kodein	1	6	24
Harga	20000	30000	

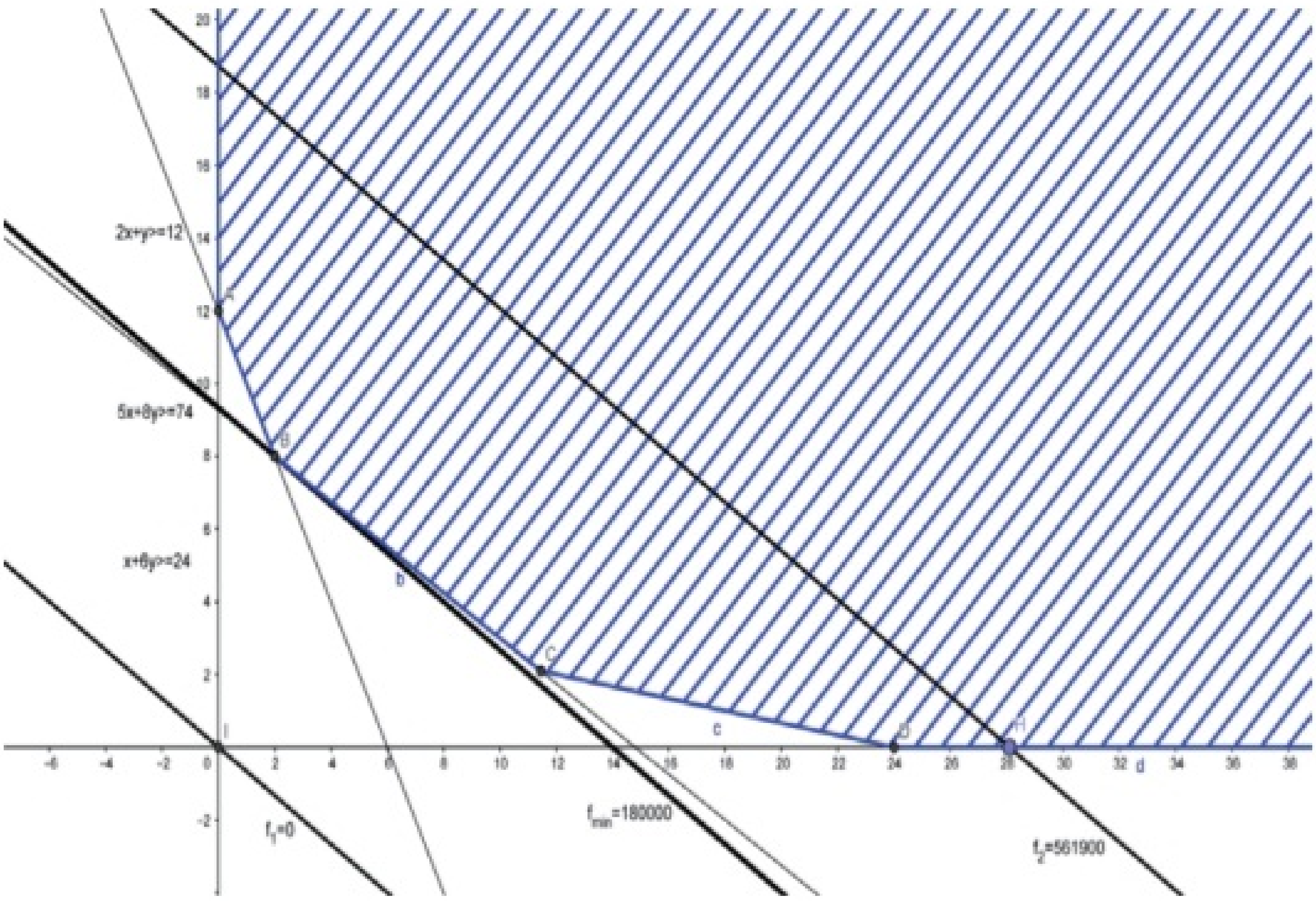
Gambar 1.5. *Tabel Masalah Farmasi*

Formulasi masalah berdasarkan Tabel 1.5. di atas yaitu:

- Meminimumkan $f = 20000x + 30000y$
- Dengan kendala

$$2x + y \geq 12$$
$$5x + 8y \geq 74$$
$$x + 6y \geq 24$$

Catatan: grafik berikut dibuat untuk $f = 200x + 300y$ dalam 100 rupiah.



Gambar 1.6. *Grafik Masalah Farmasi*

Dari grafik pada Gambar 1.6. tersebut, diperoleh beberapa garis senilai yaitu $f_1 = 0$ dan $f_2 = 561900$. Berdasarkan dua garis senilai tersebut, tampak bahwa garis senilai akan semakin besar jika digeser ke kanan. Oleh karena itu, titik optimum akan berada di titik B yang merupakan perpotongan garis dari kendala 1 dan kendala 2, yaitu $2x + y = 12$ dan $5x + 8y = 74$. Selanjutnya, diperoleh titik optimum (2,8) dengan nilai fungsi minimum $f = 20000(2) + 30000(8) = 280000$. Jadi, banyaknya kapsul Fluin ada 2 dan banyaknya kapsul Fluon ada 8 harus dibeli supaya cukup untuk menyembuhkan dan meminimumkan ongkos pembelian total yaitu Rp. 280.000.

Dalam permasalahan terkait Program Linear, dapat dibedakan permasalahan terkait beberapa kejadian penyelesaian, yang dapat digolongkan sebagai berikut:

1. Persoalan Program Linear dengan adanya pilihan penyelesaian.
2. Persoalan Program Linear dengan pola soal tidak layak
3. Persoalan Program Linear dengan penyelesaian tak terbatas
4. Persoalan Program linear bulat.

Beberapa kejadian penyelesaian dalam permasalahan Program Linear diberikan dengan contoh soal berikut ini:

a. Ada pilihan penyelesaian

Mencari *u*, *v* tak negatif yang memenuhi

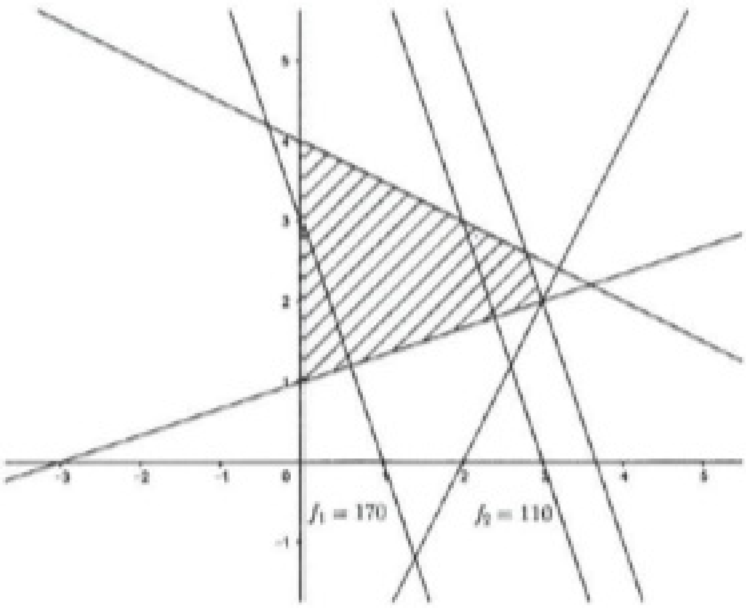
$2u - v \leq 4$ (1)

$3u + v \leq 11$ (2)

$u + 2v \leq 8$ (3)

$-u + 3v \geq 3$ (4)

dan meminimumkan $f = 200 - 30u - 10v$.



Gambar 1.7. *Grafik dengan Pilihan Penyelesaian*

b. Soal tidak layak

Mencari x,y yang memenuhi

$x - 2y \geq 0$ (1)

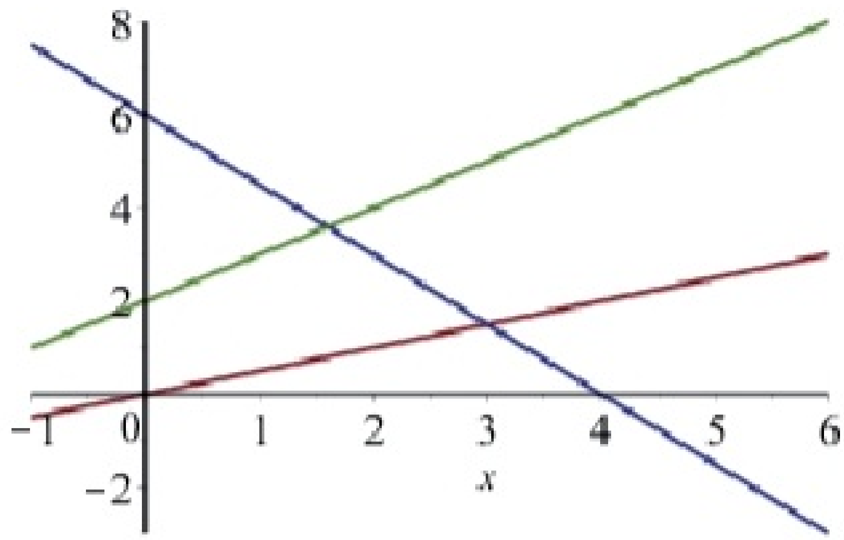
$3x + 2y \leq 12$ (2)

$-x + y \geq 2$ (3)

$x \geq 0$ (4)

$y \geq 0$ (5)

dan meminimumkan $f = 40x - 10y$



Gambar 1.8. *Grafik untuk Soal Tidak Layak*

c. Penyelesaian tak terbatas

Mencari x, y yang memenuhi

$-x + 2y \leq 4$ (1)

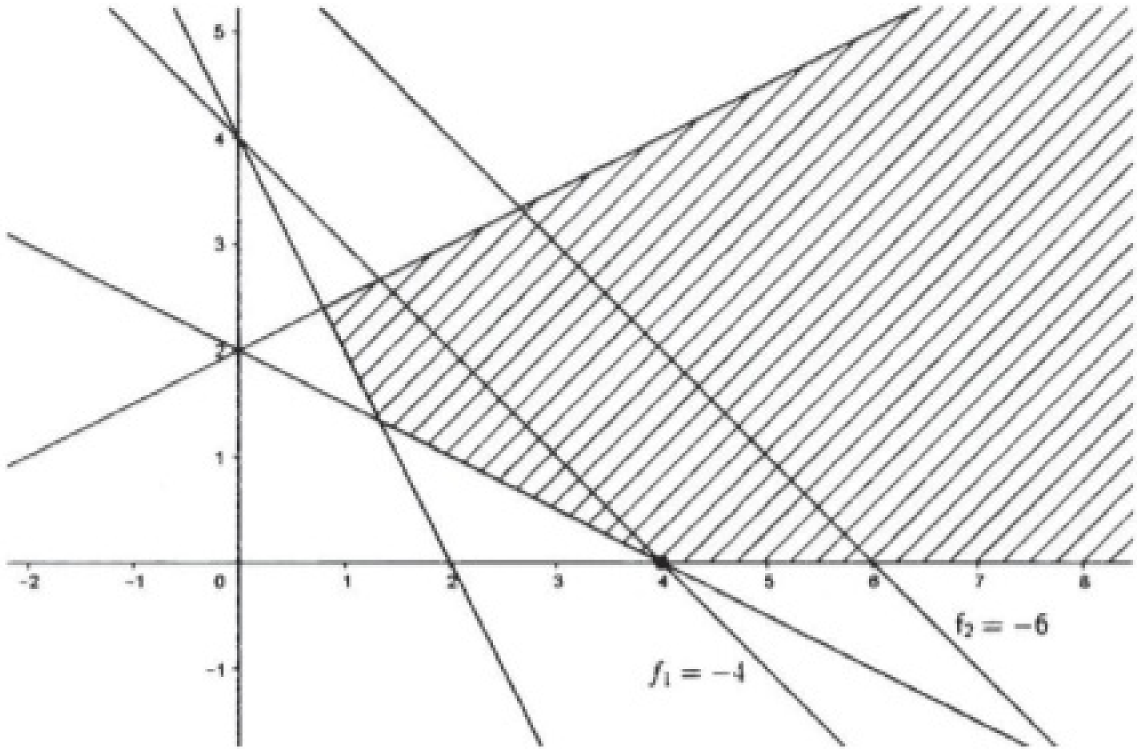
$2x + y \geq 4$ (2)

$x + 2y \geq 4$ (3)

$x \geq 0$ (4)

$y \geq 0$ (5)

dan: meminimumkan $f = -x + y$



Gambar 1.9. *Grafik untuk Penyelesaian Tak Terbatas*

d. Program linear bulat diberikan sebagai contoh pada kasus berikut ini:
Setiap semester seorang agen mobil KOYOTA memesan dagangan dari pusatnya berupa sedan (S) dan van (V) yang berturut-turut memberi laba kepadanya sebesar Rp. 5.000.000 dan Rp. 3.500.000 per unit yang terjual. Kantor pusat mengharuskan agen untuk memesan S paling sedikit 20% dari seluruh pesanan. Di tempat agen, luas ruang pamer (showroom) sekaligus gudang hanya cukup untuk 10 buah S saja atau untuk 15 buah V saja. Dalam keadaan demikian, berapa S dan berapa V sebaiknya dipesan (per semester) bila diketahui bahwa pada akhir semester dagangan lama pasti habis terjual dan agen ingin memaksimumkan laba total?

Pembahasan:

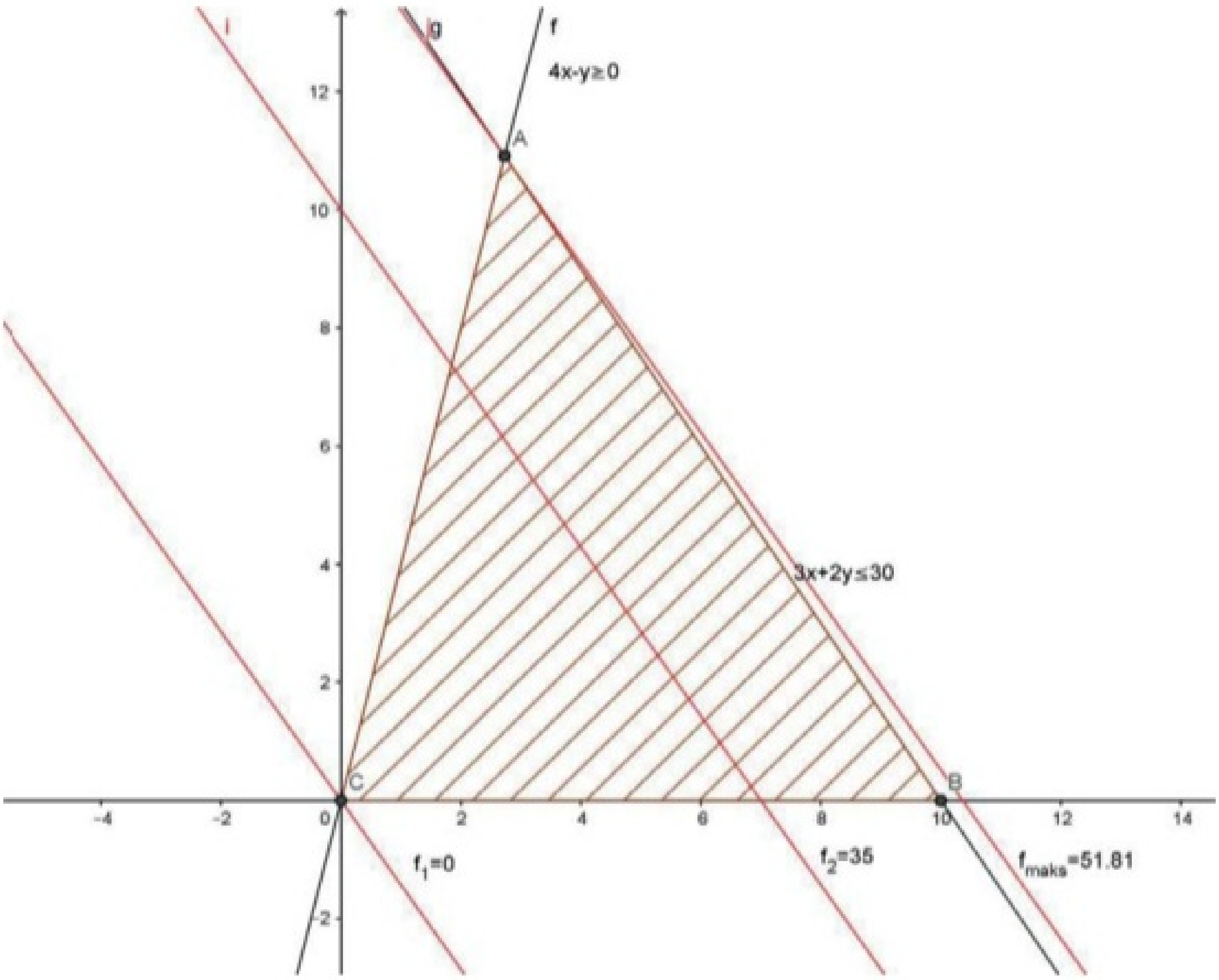
Dari permasalahan di atas, diperoleh data berikut.
Fungsi-fungsi kendala utama yaitu

$$4x - y \geq 0$$

$$3x + 2y \leq 30$$

Fungsi-fungsi kendala tak negatif yaitu $x \geq 0, y \geq 0$ x, y bilangan bulat di mana x menyatakan banyak sedan dan y banyak van.

Sedangkan fungsi tujuan yaitu memaksimumkan $f = 5x + 3{,}5y$ (dalam juta rupiah). Dengan menggambar grafik dan menentukan dua garis senilai diperoleh grafik dari informasi di atas sebagai berikut.



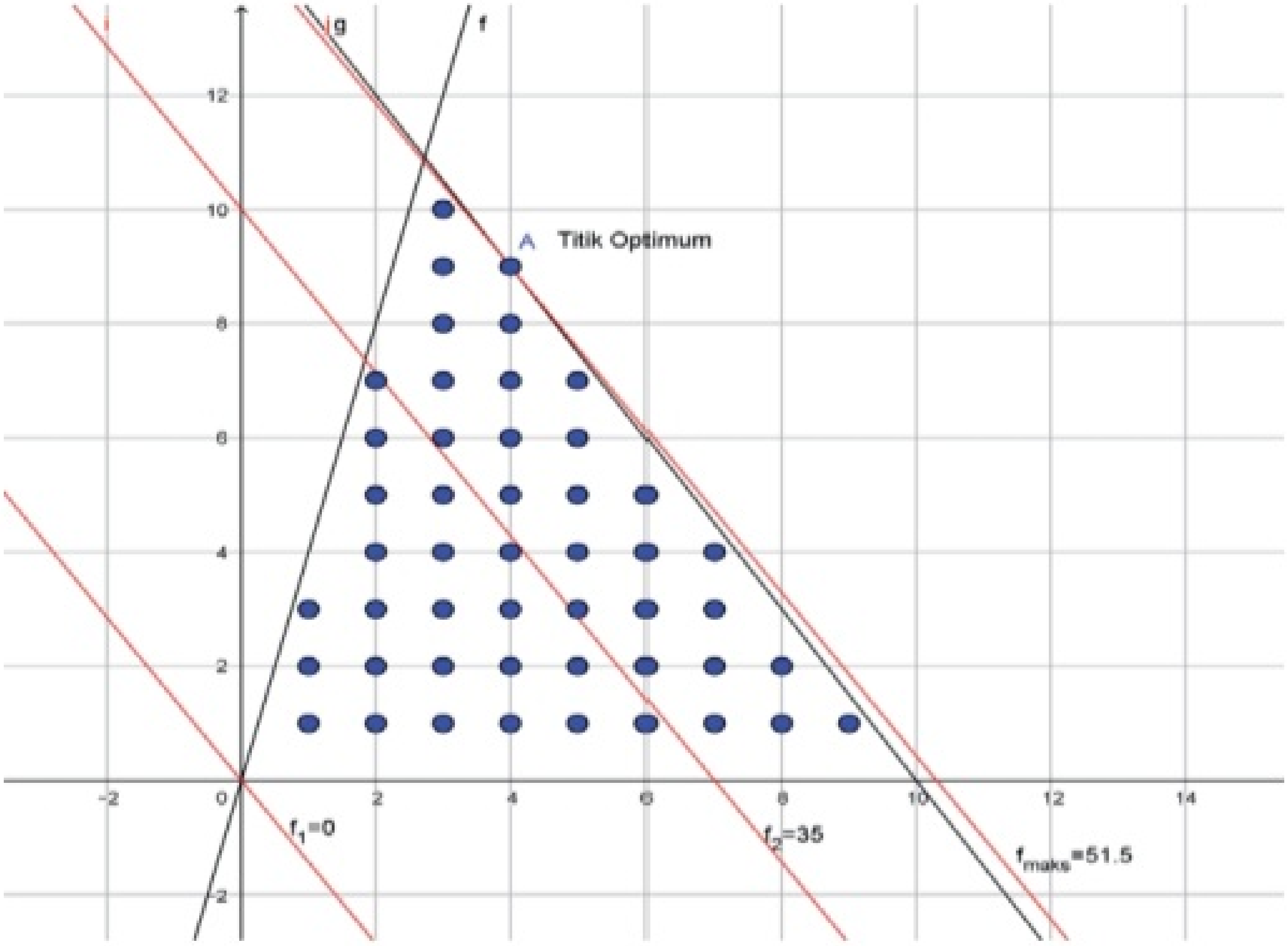
Gambar 1.10. *Grafik Penyelesaian Penjualan Mobil*

Dari soal di atas, berdasarkan Gambar 1.10. timbul masalah bila penyelesaian itu akan ditafsirkan kembali, karena nilai S dan V ditemukan berupa pecahan dan ini tidak dapat dilaksanakan.

Hal ini terjadi karena dalam perumusan S dan V hanya disyaratkan tidak negatif dan belum disyaratkan bulat.

Teknik penyelesaian khusus, yaitu program linear bulat (*integer linear programming*).

Selanjutnya, dengan informasi di atas diperoleh gambar sebagai berikut.



Gambar 1.11. *Grafik Penyelesaian Penjualan Mobil dengan penambahan Syarat Bilangan Bulat*

Berdasarkan Gambar 1.11. dapat diperoleh penyelesaian permasalahan penjualan mobil yang sesuai dengan persoalan semula, yaitu banyaknya sedan 4 dan banyaknya van 9 dengan f maksimum yang memenuhi adalah Rp. 51.500.000.

Contoh lain Program Linear Bulat, diberikan sebagai berikut.

Tentukan bilangan cacah p, q memenuhi

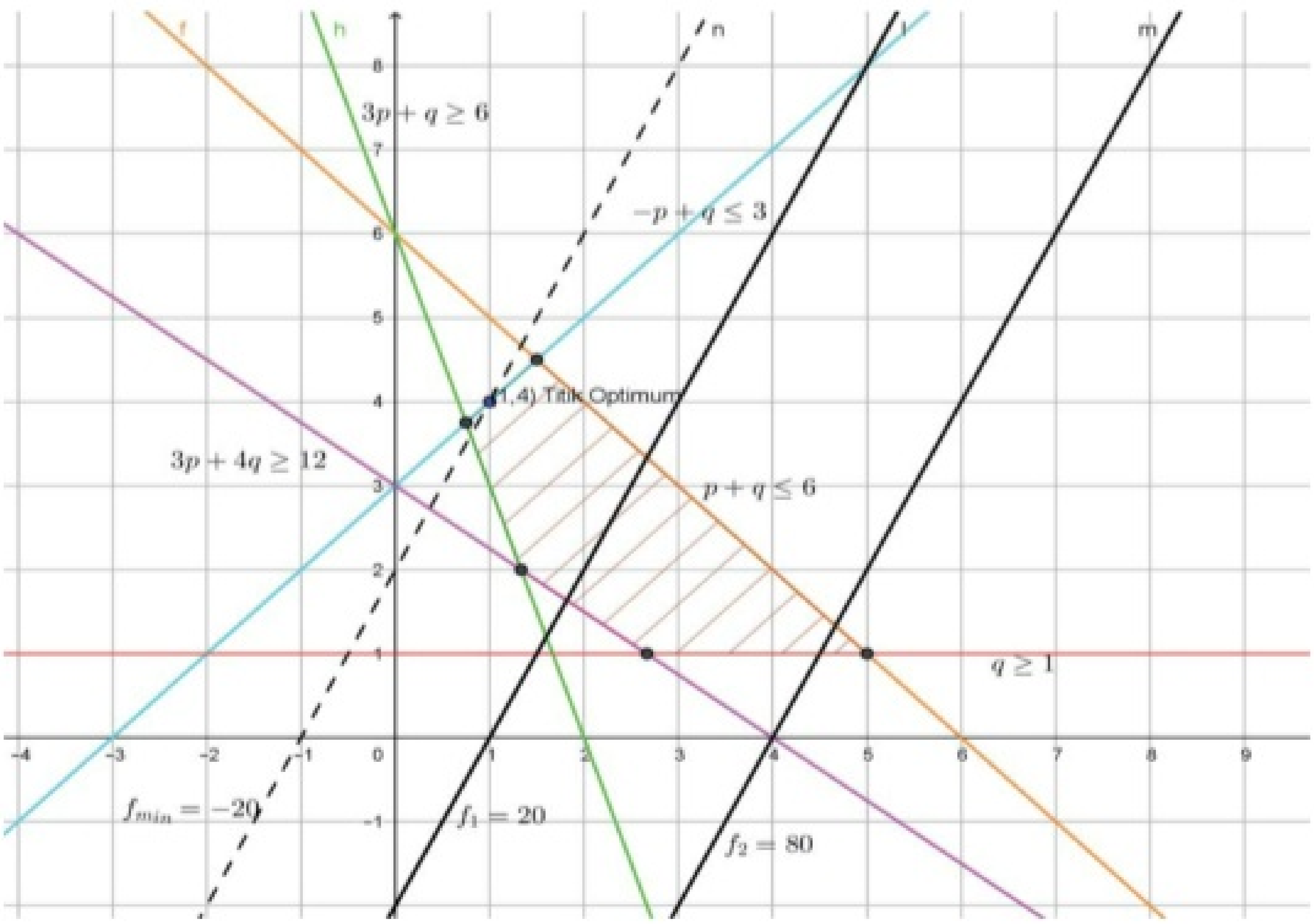
$$p + q \leq 6$$
$$-p + q \leq 3$$

$$3p + q \geq 6$$
$$3p + 4q \geq 12$$
$$q \geq 1$$

Meminimumkan $f = 20p - 10q$.

Pembahasan:

Berdasarkan data dalam soal di atas, berikut ini grafik yang menyatakan penyelesaian dari Soal Program Linear Bulat.



Gambar 1.12. *Grafik Penyelesaian atas Bilangan Cacah*

Berdasarkan Gambar 1.12., diperoleh penyelesaian dari soal di atas yaitu nilai optimum pada (1,4) dengan f minimum yaitu -20.

1.3 TEORI SIMPLEKS

Penyelesaian dari Sistem Persamaan Linear (SPL) dapat berupa:

1. Penyelesaian tunggal

2. Penyelesaian banyak (tak hingga)
3. Tidak mempunyai penyelesaian

Salah satu cara menentukan penyelesaian SPL adalah dengan menyusutkan matriks lengkap dengan eliminasi Gauss-Jordan (operasi baris elementer).

Secara umum SPL dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$AX = B$$

Sedangkan yang dimaksud Matriks lengkap (*augmented matrices*), mempunyai persamaan $\bar{A}$ = (A , B).

Terkait penyelesaian dari matriks lengkap dapat dijelaskan sebagai berikut:

rank (A) $\neq$ rank (A,B)= rank ($\bar{A}$) $\Rightarrow$ tidak ada penyelesaian

rank (A) = rank (A,B) = rank ($\bar{A}$) = p $\Rightarrow$ ada penyelesaian , yang dapat berupa:

p < n penyelesaian banyak p = n penyelesaian tunggal

Ciri di atas dapat juga dilihat dari hasil eliminasi Gauss-Jordan sebagai berikut:

Jika $\bar{A}$ = (A , B) disusutkan menjadi $\begin{bmatrix} I_p & E & R \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix}$ maka:

Q $\neq$ 0 $\Rightarrow$ tidak ada penyelesaian

Q = 0 $\Rightarrow$ ada penyelesaian: E $\neq$ 0 penyelesaian banyak

E = 0 penyelesaian tunggal

Akibatnya, untuk E $\neq$ 0 diperoleh susunan:

$[I_p \quad E]$ X = R atau

$$x_1 + e_{1.p+1}x_{p+1} + \ldots.. + e_{1n}x_n = r_1$$
$$x_2 + e_{2.p+1}x_{p+1} + \ldots.. + e_{2n}x_n = r_2$$
$$\vdots$$
$$x_p + e_{p.p+1}x_{p+1} + \ldots. + e_{pn}x_n = r_p$$

Jadi terdapat p persamaan bebas linier dengan n peubah dengan p<n. Yang berakibat terdapat (n-p) peubah bebas dan terdapat p peubah tak bebas. Sehingga $(x_1 , x_2 , \ldots , x_p , x_{p+1} , \ldots , x_n) = (r_1 , r_2 , \ldots. , r_p , 0 , 0 , \ldots , 0)$ disebut penyelesaian basis dan $x_1 , x_2 , \ldots , x_p$ peubah basis.

Contoh 1.2

$$2u + v + w + 3x = 8$$
$$u - v + 2w = 1$$
$$5u - 2v + 7w + 3x = 11$$

Dari SPL tersebut, diperoleh matriks lengkap dan operasi Gauss Jordan sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 7 & 3 & 11 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow [I_p \quad E]\ X = R$$

Akibatnya, diperoleh SPL yang sederhana sebagai berikut:

$$u + w + x = 3$$
$$v - w + x = 2$$

Dari SPL tersebut, terdapat 2 persamaan bebas linier dengan 4 peubah, 2<4. Dengan 4-2 = 2 peubah bebas, yaitu w, x , dan 2 peubah tak bebas, yaitu u,v. Sehingga (u, v, w, x) = (3, 2, 0, 0) salah satu penyelesaian basis dengan u, v peubah basis. Selain itu, dapat diperoleh penyelesaian lain, yaitu (5, 0, -2, 0) atau (3-s-t, 2+s-t, s, t).

LATIHAN SOAL

1. PT Padat Karya memproduksi dua macam batako: batako semen dan batako kapur. Biaya pembuatan batako semen diperkirakan Rp. 150.000,- sedang biaya pembuatan batako kapur diperkirakan Rp. 100.000,-. Batako semen dijual seharga Rp. 400.000,- dan batako kapur dijual seharga Rp. 250.000,-. Untuk pembuatan kedua macam batako tersebut dipergunakan 2 macam mesin: A: mesin pencampur dan B: mesin pencetak. Untuk mencampur batako semen diperlukan waktu 1 jam, dan untuk mencetak batako semen diperlukan waktu 2 jam. Batako kapur dicampur selama 1.5 jam dan dicetak selama 1 jam. Selama satu bulan kapasitas mesin A 320 jam kerja. Sedang kapasitas mesin B adalah 480 jam kerja. Jika tujuan perusahaan memaksimumkan keuntungan, tentukan jumlah batako semen dan batako kapur yang harus diproduksi.

2. Selesaikan masalah Program Linear berikut:
   Fungsi Tujuan max $z = 4x + 3y$

   Fungsi kendala:
   $x + y \leq 50$ (1)
   $x + 2y \leq 80$ (2)
   $3x + 2y \leq 140$ (3)
   $x, y \geq 0$

-oo0oo-

2

PROGRAM LINEAR DENGAN METODE SIMPLEKS

2.1 PENDAHULUAN METODE SIMPLEKS

Formulasi model Program Linear dapat dinyatakan sebagai berikut:

1. Menentukan variabel yang tidak diketahui
2. Membentuk fungsi tujuan (ditunjukkan sebagai hubungan linear dari variabel keputusan)
3. Menentukan semua kendala masalah (kendala utama dan kendala tak negatif) dan mengekspresikannya dalam bentuk persamaan atau ketaksamaan (juga merupakan hubungan linear dari variabel keputusan yang menyatakan keterbatasan sumberdaya masalah)

Contoh 2.1:

Sebuah perusahaan menghasilkan 3 jenis produk, yakni sepatu, tas, dan dompet. Jumlah waktu kerja buruh yang tersedia adalah 240 jam kerja dan bahan mentah yang tersedia 400 kg, harga produk tersaji seperti pada tabel berikut:

Jenis produk	Kebutuhan Sumberdaya		Harga (Rp/unit)
	Buruh (jam/unit)	Bahan (kg/unit)	
Produk 1 (sepatu)	5	4	3
Produk 2 (tas)	2	6	5
Produk 3 (dompet)	4	3	2

Gambar 2.1. *Tabel Jenis Produk dan Kebutuhan Sumber Daya*

Masalah yang dihadapi perusahaan adalah menentukan jumlah masing-masing produk yang harus dihasilkan agar keuntungan maksimum.

Tiga variabel dalam masalah ini, yang merupakan variabel keputusan adalah jumlah sepatu, tas, dan dompet yang harus dihasilkan. Dan untuk menyatakan ketiga variabel tersebut dapat menggunakan lambang berikut:

x_1 = jumlah produk 1
x_2 = jumlah produk 2
x_3 = jumlah produk 3

Tujuan masalah ini adalah memaksimumkan penerimaan total, yakni jumlah penerimaan dari masing-masing produk. Hal tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut:

a. Penerimaan produk 1 adalah perkalian harga per unit dengan jumlah produk 1.
b. Penerimaan produk 2 dan 3 diperoleh dengan cara serupa, sehingga penerimaan total (z atau f) ditulis sebagai:

   $$Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

   Dan, bentuk ini disebut sebagai Fungsi Tujuan.

Kendala utama dalam masalah ini adalah jumlah **jam kerja buruh** dan **bahan mentah**. Dan selanjutnya disebut Sistem Kendala, yang dapat diuraikan sebagai berikut:

a. Kendala buruh:
   Jam kerja yang dibutuhkan untuk menghasilkan per unit produk 1 adalah 5 jam, sehingga jam kerja yang dibutuhkan untuk produk 1 adalah $5x_1$ jam. Produk 2 dan 3 ditentukan dengan cara serupa

sementara jumlah jam kerja buruh yang tersedia adalah 240 jam, sehingga kendala buruh dituliskan sebagai:

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 240$$

b. Kendala bahan mentah:
Produk 1 memerlukan 4 kg per unit, produk 2 memerlukan 6 kg per unit, produk 3 memerlukan 3 kg per unit.

Sementara jumlah bahan mentah yang tersedia adalah 400 kg, maka kendala bahan mentah dituliskan sebagai:

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 400$$

Model matematika dari masalah program linear di atas adalah:

Memaksimumkan $Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$

diketahui: $5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 240$
$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 400$

dan $x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$
$x_3 \geq 0$

Contoh 2.2:

Untuk menjaga kesehatan, seseorang harus memenuhi kebutuhan minimum beberapa zat makanan per hari. Misalkan ada tiga zat makanan yang dibutuhkan dalam keadaan ini, yaitu kalsium, protein, dan vitamin A, yang terkandung dalam tiga jenis makanan, yaitu sayur, daging, dan susu, seperti ditunjukkan dalam tabel berikut.

Kandungan	**Kebutuhan sumberdaya**			**Kebutuhan minimum**
	sayur	**daging**	**susu**	
Kalsium	5	1	0	8
Protein	2	2	1	10
Vitamin A	1	5	4	22
Harga per unit	0,5	0,8	0,6	

Gambar 2.2. *Tabel Kandungan Makanan dan Kebutuhan Sumber Daya*

Masalah untuk kasus di atas adalah bagaimana mencari kombinasi ketiga jenis makanan itu agar memenuhi kebutuhan minimum zat makanan per hari dengan biaya terendah.

Penyelesaian:

Tiga variabel dalam masalah ini adalah jumlah sayur, daging, dan susu yang harus disediakan untuk memenuhi kebutuhan minimum zat makanan per hari. Selanjutnya, ketiga variabel tersebut dinyatakan sebagai variabel keputusan, yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

x_1 = jumlah sayur
x_2 = jumlah daging
x_3 = jumlah susu

Tujuan masalah ini adalah meminimumkan biaya total menu per hari, yakni jumlah biaya dari masing-masing jenis makanan yang disajikan dalam menu. Selanjutnya, dinyatakan sebagai fungsi tujuan, sehingga biaya total (Z) ditulis sebagai:

$$Z = 0{,}5x_1 + 0{,}8x_2 + 0{,}6x_3$$

Kendala dalam masalah ini adalah kebutuhan minimum akan zat-zat makanan per hari yang ditetapkan, yaitu kalsium, protein, dan vitamin A. Dan selanjutnya disebut sistem kendala, yang terdiri dari:

a. Kendala kalsium:
   Ditulis sebagai:

   $$5x_1 + x_2 \geq 8$$

   dengan rincian:

   $5x_1$ adalah sumbangan kalsium dari sayur
   x_2 adalah sumbangan kalsium dari daging

   Tanda ketaksamaan ≥ menunjukkan kebutuhan minimum kalsium.

b. Kendala protein:
   Ditulis sebagai:

   $$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10$$

dengan rincian:

$2x_1$ adalah sumbangan protein dari sayur
$2x_2$ adalah sumbangan protein dari daging
x_3 adalah sumbangan protein dari susu

c. Kendala vitamin A:
Ditulis sebagai:

$$x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq 22$$

dengan rincian:

x_1 adalah sumbangan vitamin A dari sayur
$5x_2$ adalah sumbangan vitamin A dari daging
$4x_3$ adalah sumbangan vitamin A dari susu

Model matematika dari masalah program linear di atas adalah:

Meminimumkan $Z = 0{,}5x_1 + 0{,}8x_2 + 0{,}6x_3$

diketahui:

$$5x_1 + x_2 \geq 8$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10$$
$$x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq 22$$

dan $x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$
$x_3 \geq 0$

Adapun asumsi model Program Linear, dapat diuraikan kembali sebagai berikut:

1. *Linearity* dan *Additivity*
   Yang dimaksud asumsi tersebut, dijelaskan sebagai berikut.
   a. Fungsi tujuan dan semua kendala harus linear
   b. Jumlah variabel kriteria = jumlah keuntungan yang diperoleh masing-masing kegiatan
   c. Jumlah penggunaan sumberdaya harus bersifat aditif.
2. *Divisibility*
   Yang dimaksud asumsi tersebut, dijelaskan sebagai berikut.
   a. Nilai solusi yang diperoleh tidak harus bilangan bulat

b. Jika nilai bulat mutlak diperlukan, maka harus digunakan Program Linear Bulat (*Integer Linear Programming)*

3. *Deterministic*

Yang dimaksud asumsi tersebut, dijelaskan sebagai berikut.

a. Semua parameter model (c_j, a_{ij}, b_i) diasumsikan konstan
b. Semua parameter diketahui dengan kepastian
c. Dalam kenyataannya parameter model jarang bersifat deterministik, karena mencerminkan kondisi saat ini dan masa depan yang jarang diketahui dengan pasti.

2.2 PROGRAM LINEAR DENGAN METODE SIMPLEKS

Masalah Program Linear dengan dua variabel atau tiga variabel yang dapat disusutkan masih dapat diselesaikan dengan metode grafik. Untuk masalah Program Linear yang memuat tiga variabel atau lebih digunakan Metode Simpleks. Berikut ini masalah Program Linear yang dapat disusutkan, sehingga variabel yang semula 3 menjadi 2 variabel, sehingga dapat diselesaikan dengan metode grafik.

Contoh 2.3:

Tentukan x, y, z tak negatif yang meminimumkan

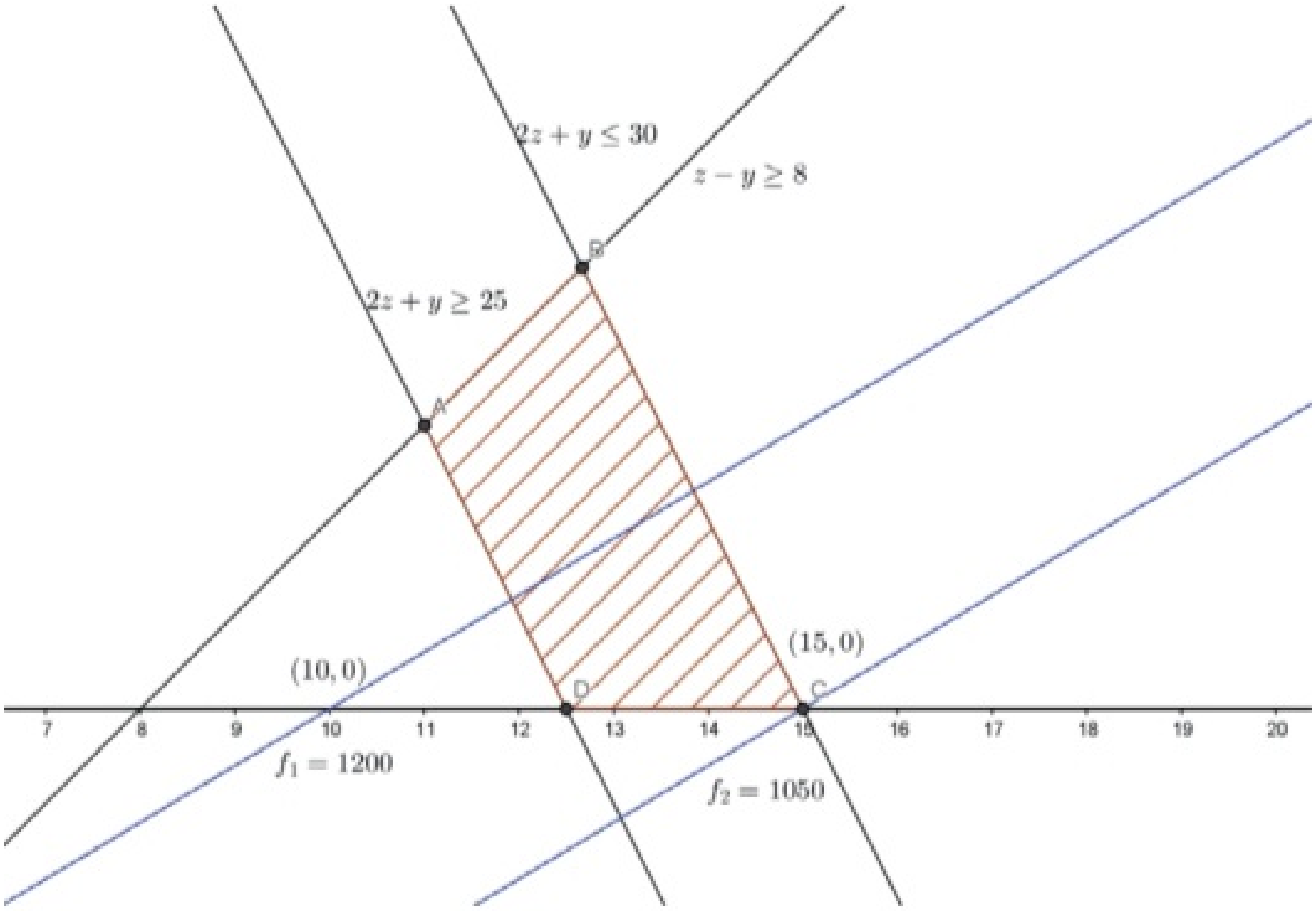
$$f = 100x + 100y + 70z$$

dengan kendala:

$$2x + 2y + z \leq 22$$
$$y + 2z \geq 25$$
$$2x + y + 2z = 30$$

Pembahasan:

Menggunakan persamaan pada kendala yang ketiga, maka variabel x dapat dinyatakan dalam y dan z. Dengan menyatakan x dalam y dan z, maka diperoleh grafik sebagai berikut:



Gambar 2.3. *Grafik dari Contoh 2.3.*

Berdasarkan Gambar 2.3. tampak bahwa penyelesaian soal di atas adalah $z = 15$ dan $y = 0$ dengan f minimum yaitu 1050.

Teknik penyelesaian menggunakan metode simpleks mengikuti teori yang dapat diuraikan sebagai berikut. Sebelumnya, jika ditulis dalam simbol matematika maka bentuk-bentuk soal Program Linear yang diantaranya terdiri dari sistem kendala dan kendala utamanya dapat berbentuk

$$\sum a_{ij}x_j \le b_i, \sum a_{ij}x_j \ge b_i \text{ atau } \sum a_{ij}x_j = b_i.$$

Kendala berbentuk pertidaksamaan diubah ke persamaan dengan cara berikut:

1. $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j \le b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j + s_i = b_i$
2. $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j = b_i + t_i$ atau $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j - t_i = b_i$

dengan s_i $dan\, t_i$ disebut variabel atau peubah pengetat (*slack variable*), yang berfungsi membuat ruas yang semula longgar agar menjadi ketat (sama nilainya dengan ruas lain).

Maka himpunan kendala berubah menjadi sistem persamaan linear:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \;, i = 1,2,...,m$$

x_j dimulai dari j = p+1 sampai j = n

Juga, kendala tak negatif $x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,n$

Dan, fungsi tujuan yang semula

$$f = \sum_{j=1}^{p} c_j x_j$$

Dilengkapi menjadi

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;, c_{p+1} = c_{p+2} = ... = c_n = 0$$

Soal akan menjadi rumusan berikut (yang selanjutnya disebut BENTUK KANONIK dari PL):

Mencari x_j , j = 1,2, ... , n

Yang memenuhi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \;, i = 1,2,...,m$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,...,n$$

Dan memaksimumkan (atau meminimumkan)

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Berikut diberikan contoh mengubah bentuk soal Program Linear ke bentuk kanoniknya.

Contoh 2.4:

Ubah soal berikut ke bentuk kanonik:

Mencari x_1, x_2, x_3 tak negatif yang memenuhi:

$$2x_1 - x_2 + x_3 \le 6$$
$$x_1 + 3x_2 \le 10$$

Dan memaksimumkan $f = 20x_1 + 10x_2 + 5x_3$

Penyelesaian:

Variabel pengetat: x_4 dan x_5

Bentuk kanonik menjadi:

Mencari x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tak negatif yang memenuhi:

$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 6$$
$$x_1 + 3x_2 + x_5 = 10$$

Dan memaksimumkan

$$f = 20x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

Contoh 2.5:

Ubah soal berikut ke bentuk kanonik.

Mencari u, v, w tak negatif yang memenuhi

$$3u + 5v + w \ge 20$$
$$u - 5v + 2w \le 50$$
$$u + v + w = 25$$

Dan meminimumkan f = 100-3u+ v + 5w.

Penyelesaian:

Variabel pengetat: s dan t

Bentuk kanonik soal tersebut:

Mencari u, v, w, s, t tak negatif yang memenuhi:

$$3u + 5v + w - s = 20$$
$$u - 5v + 2w + t = 50$$
$$u + v + w = 25$$

Dan meminimumkan

$$f = 100 - 3u + v + 5w + 0s + ot$$

Langkah-langkah Simpleks dapat dilakukan dengan mengubah masalah Program Linear ke bentuk kanonik terlebih dulu. Berikut ini adalah penjelasan langkah atau teori tersebut.

Dari bentuk kanonik:

$(x_1, x_2, ..., x_n)$ yang

memenuhi $\sum a_{ij} x_j = b_i$ dan $x_j \geq 0$.

merupakan penyelesaian layak. Dan bila penyelesaian layak tersebut mengoptimumkan $f = \sum c_j x_j$, maka penyelesaian layak tersebut menjadi penyelesaian optimum (po).

Kondisi tersebut di atas, dijelaskan dengan contoh berikut:

Contoh 2.6:

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = d_1$$
$$a_2 x_2 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1,2,3,0,0)$$

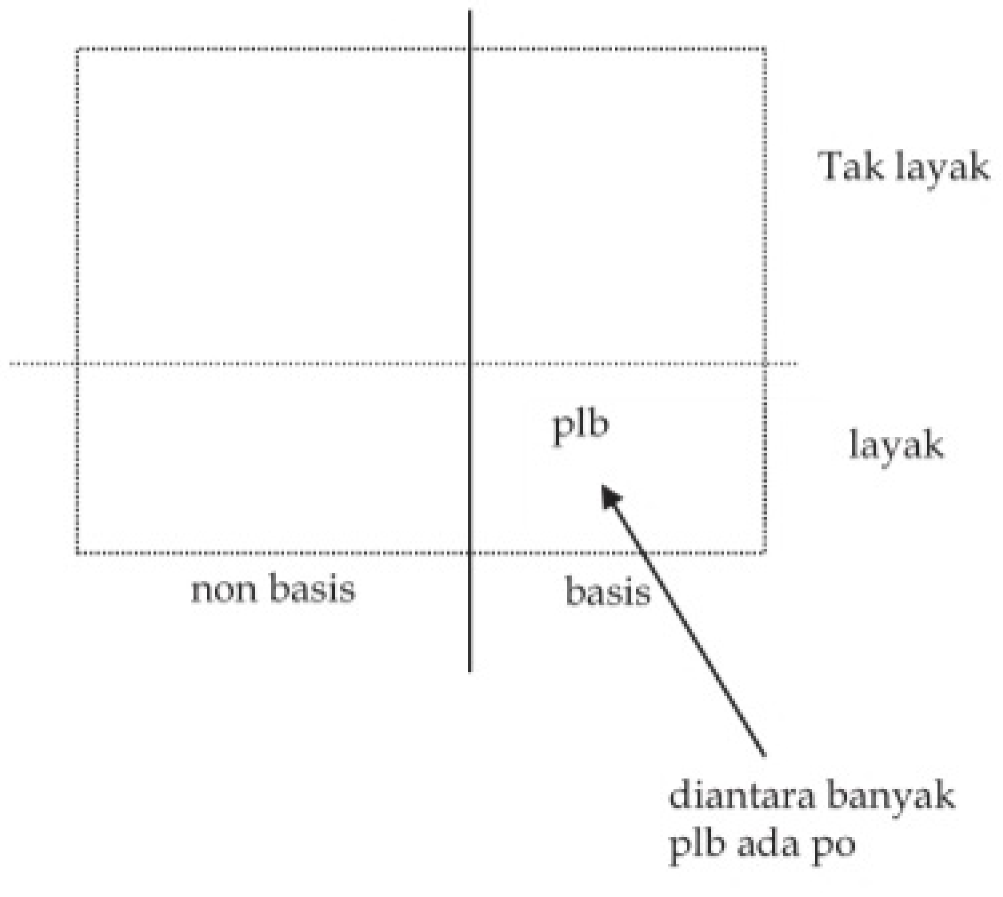
Contoh 2.6. menjelaskan penyelesaian basis. Penyelesaian Basis dari suatu sistem persamaan adalah penyelesaian yang diperoleh dengan menyamakan sebagian variabelnya dengan nol.

Dalam himpunan penyelesaian $\sum a_{ij} x_j = b_i$, beberapa di antaranya berupa penyelesaian basis (pb). Penyelesaian basis tidak selalu bernilai positif. Jika penyelesaian basis memenuhi $x_j \geq 0$ atau bernilai tak negatif semua maka diperoleh penyelesaian layak basis (plb).

Teorema Penyelesaian Layak Basis dan Penyelesaian Optimum:

Jika suatu soal Program Linear mempunyai penyelesaian optimum (po) maka paling sedikit satu di antara penyelesaian optimum tersebut pasti berupa penyelesaian layak basis (plb).

Jadi, pencarian penyelesaian optimum soal Program Linear dibatasi dalam himpunan penyelesaian layak basis (plb). Hal ini berarti, di antara beberapa penyelesaian layak basis, ada yang merupakan penyelesaian optimum. Sehingga, dapat dikatakan bahwa setiap penyelesaian optimum pasti merupakan penyelesaian layak basis, tetapi tidak sebaliknya. Pencarian penyelesaian optimum (po) soal Program Linear dibatasi dalam himpunan penyelesaian layak basis (plb), dapat digambarkan sbb:



Gambar 2.4. *Kedudukan Penyelesaian Layak Basis dan Optimum*

Sehingga langkah-langkah simpleks dapat diuraikan berikut:

1. Pilih salah satu penyelesaian layak basis (plb).
2. Uji apakah penyelesaian layak basis (plb) tersebut berupa penyelesaian optimum (po). Bila sudah optimum, proses selesai, bila belum dilanjutkan ke langkah 3.
3. Pilih penyelesaian layak basis (plb) baru yang lebih baik (lebih dekat ke penyelesaian optimum) dibandingkan plb sebelumnya. Kembali ke langkah 2 dan seterusnya, sampai ditemukan plb yang berupa po.

Tabel simpleks diberikan dalam tabel berikut.

	c_j	$c_1\ c_2 \ldots\ldots c_n$		
$\overline{c_i}$	$\overline{x_i} \setminus x_j$	$x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n$	b_i	R_i
$\overline{c_1}$	$\overline{x_1}$	$a_{11}\quad a_{12}\quad \ldots\quad a_{1n}$	b_1	R_1
$\overline{c_2}$	$\overline{x_2}$	$a_{21}\quad a_{22}\quad \ldots\quad a_{2n}$	b_2	R_2
.	.		.	.
.	.	$\vdots$	.	.
.	.		.	.
$\overline{c_n}$	$\overline{x_n}$	$a_{m1}\quad a_{m2}\quad \ldots\quad a_{mn}$	b_m	R_m
	Z_j	$Z_1\quad Z_2\quad \ldots\quad Z_n$	Z	
	$Z_j - c_j$	$Z_1 - c_1\quad Z_2 - c_2\quad \ldots\quad Z_n - c_n$	Z	

Gambar 2.5. *Tabel Simpleks*

Keterangan dari Gambar 2.5 yaitu:

x_i = variabel-variabel pelengkap

a_{ij} = koefisien teknis

b_i = suku tetap (tak negatif)

c_j = koefisien ongkos

$\overline{x_i}$ = variabel yang menjadi basis dalam tabel yang ditinjau

$\overline{c_i}$ = koefisien ongkos milik peubah basis $\overline{x_i}$

Z_j = $\sum_{i=1}^{m} \overline{c_i} a_{ij}$ (hasilkali dari $\overline{c_i}$ dengan kolom a_{ij})

$Z_j - c_j$ = selisih Z_j dengan c_j.

Apabila tabel belum optimum dan x_k terpilih sebagai basis baru maka disusun kolom R_i. Nilai-nilai untuk R_i diperoleh dengan rumus berikut:

$R_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$ hanya untuk $a_{ik} > 0$

dengan a_{ik} merupakan unsur kolom kunci.

Dengan adanya tabel simpleks, maka langkah-langkah simpleks menjadi:

1. Menyusun tabel awal (dengan matriks a_{ij} tersusut).
2. Menguji keoptimuman tabel (keoptimuman plb dalam tabel). Bila sudah optimum, proses selesai. Bila belum optimum, ke langkah (3).
3. Memperbaiki tabel.

Ada beberapa hal yang perlu diperhatikan yaitu:

a. Tabel dikatakan sudah maksimum (penyelesaian sudah optimum) bila memenuhi $z_j - c_j \geq 0$ untuk setiap j.
b. Memperbaiki tabel.
   Proses memperbaiki tabel dilakukan dengan aturan sebagai berikut.
   Memilih variabel baru yang masuk menjadi basis dan memilih variabel basis lama yang harus diganti. Proses ini dapat dilakukan dengan eliminasi Gauss-Jordan.

Berdasarkan sistem kendala (fungsi kendala) dan fungsi tujuan, jenis-jenis masalah Program Linear dapat dikelompokkan menjadi:

a. Pola maksimum baku:
   Mencari $x_j > 0$
   Memenuhi $\sum a_{ij} x_j \leq b_i$
   Memaksimumkan $f = \sum c_j x_j$
b. Pola maksimum tidak baku
   (tidak semua bertanda "$\leq$")
c. Pola minimum baku:
   Mencari $x_j > 0$

Memenuhi $\sum a_{ij}x_j \geq b_i$

Meminimumkan $f = \sum c_j x_j$

d. Pola minimum tidak baku

(tidak semua bertanda "≥")

Untuk kasus pada Pola Maksimum Baku, diberikan dalam contoh sebagai berikut.

Contoh 2.7:

Sekelompok petani mendapatkan 6 ha tanah yang dapat ditanami padi, jagung dan palawija lain. Karena keterbatasan sumber daya petani harus menentukan berapa bagian yang harus ditanami padi dan berapa yang harus ditanami jagung, sedangkan palawija lain ternyata tidak menguntungkan.

Dalam satu masa tanam tenaga yang tersedia hanya 1590 jam-orang, pupuk tidak lebih dari 480 kg, sedangkan air dan sumber daya lain dianggap cukup tersedia. Diketahui bahwa untuk menghasilkan 1 kwintal padi diperlukan 12 jam-orang tenaga dan 4 kg pupuk, dan untuk 1 kwintal jagung diperlukan 9 jam-orang tenaga dan 2 kg pupuk. Kondisi tanah memungkinkan menghasilkan 50 kw padi per ha atau 20 kw jagung per ha.

Pendapatan dari 1 kw padi Rp. 320.000 dan dari 1 kw jagung Rp. 200.000 dan dianggap semua hasil tanamnya selalu habis terjual.

Harus dicari x,y yang memenuhi:

$2x + 5y \leq 600$

$4x + 3y \leq 530$

$2x + y \leq 240$

dengan x, y tak negatif dan memaksimumkan

$f = 32x + 20y$

Dengan menambahkan tiga variabel pengetat r, s, dan t, soal akan menjadi:

Mencari x, y, r, s, t tak negatif yang memenuhi

$$2x + 5y + r = 600$$
$$4x + 3y + s = 530$$
$$2x + y \quad + t = 240$$

Memaksimumkan f = 32x + 20y + or + os + ot

Untuk menyelesaikan permasalahan produk tani tersebut diuraikan dalam langkah-langkah berikut:

Langkah 1: Menyusun tabel awal

	c_j	32	20	0	0	0		
$\overline{c_i}$	$\overline{x_i} \setminus x_j$	x	y	r	s	t	b_i	R_i
0	r	2	5	1	0	0	600	300
0	s	4	3	0	1	0	530	$132\frac{1}{2}$
0	t	2	1	0	0	1	240	120
	Z_j	0	0	0	0	0	Z=0	
	$Z_j - c_j$	-32	-20	0	0	0	Z=0	

Langkah 2: Menguji keoptimuman tabel

Tabel sudah maksimum bila $z_j - c_j \geq o$, untuk setiap j

Keterangan: pada tabel awal masih ada $z_j - c_j$ yang negatif maka tabel belum maksimum.

Langkah 3: Memperbaiki tabel

Pemilihan variabel x_k yang masuk menjadi basis diatur dalam Kunci I.

Kunci I: Pilih k dengan $z_k - c_k < 0$ yang terkecil maka x_k terpilih menjadi basis

Kolom terpilih (yaitu kolom k) disebut kolom kunci.

Pemilihan variabel $\overline{x_p}$ yang keluar dari basis diatur dalam kunci II.

Kunci II: Pilih p dengan R_p yang terkecil, maka $\overline{x_p}$ terpilih untuk keluar dari basis

Baris terpilih (yaitu baris p) disebut baris kunci.
Unsur pada kolom dan baris kunci disebut unsur kunci.
Keterangan: dalam tabel, unsur kunci terletak pada kolom 1 dan baris 3.

Langkah 4: Kembali ke langkah 2 dan seterusnya sampai diperoleh penyelesaian optimum.

Penyusunan tabel baru menggunakan operasi baris elementer. Berikut ini adalah tabel lengkap untuk masalah produk tani.

Tabel 1

	c_j	32	20	0	0	0		
c_i	Koefisien	x	y	R	s	t	b_i	R_i
0	r	2	5	1	0	0	600	300
0	s	4	3	0	1	0	530	132,5
0	t	2	1	0	0	1	240	120
	z_j	0	0	0	0	0	0	
	z_j - c_j	-32	-20	0	0	0		

Pada Tabel 1, penyelesaian belum optimum (maksimum) karena pada baris $z_j - c_j$ masih ada yang negatif yaitu -32 dan -20. Menurut kunci I dipilih kolom dengan nilai negatif terkecil yaitu -32. Jadi kolom x merupakan kolom kunci. Sehingga diperoleh R_i berdasarkan kolom kunci tersebut. Dari R_i dipilih yang terkecil menurut kunci II, yaitu R_3 yang terletak pada baris t yang merupakan baris kunci. Hal ini berarti, variabel x harus masuk menggantikan variabel t. Karena belum optimum, maka uji keoptimuman dilanjutkan dan diperoleh Tabel 2 berikut.

Tabel 2

	c_j	32	20	0	0	0		
c_i	Koefisien	x	y	R	s	T	b_i	R_i
0	r	0	4	1	0	-1	360	90
0	s	0	1	0	1	-2	50	50
32	x	1	0,5	0	0	0,5	120	240
	z_j	32	16	0	0	16	3840	
	z_j - c_j	0	-4	0	0	16		

Pada Tabel 2 di atas, belum diperoleh penyelesaian optimum karena masih ada z_j-c_j yang bernilai negatif, yaitu pada kolom x. Sehingga perbaikan tabel dilakukan dan diperoleh Tabel 3 berikut.

Tabel 3

	c_j	32	20	0	0	0		
c_i	Koefisien	x	y	r	s	t	b_i	R_i
0	r	0	0	1	-4	7	160	
20	y	0	1	0	1	-2	50	
32	x	1	0	0	-0,5	1,5	95	
	z_j	32	20	0	4	8	4040	
	z_j - c_j	0	0	0	4	8		

Dari hasil pada Tabel 3, tampak bahwa tabel tersebut sudah memenuhi syarat optimum. Jadi, diperoleh penyelesaian permasalahan produk tani yaitu x= 95, y=50, dan nilai f maksimum adalah 4040. Hasil tersebut sesuai dengan penyelesaian sebelumnya yang telah dikerjakan dengan Metode Grafik.

Sedangkan untuk masalah Program Linear dengan Pola Maksimum Tidak Baku diberikan dalam contoh berikut.

Contoh 2.8:

Menentukan x,y, z tak negatif yang memenuhi

$$x + y + 2z \leq 12$$
$$2x - 6y - z \geq 4$$

dan memaksimumkan $f = -8x + 6y + 8z$

Dengan menyisipkan peubah pengetat r dan s diperoleh bentuk kanonik:
Mencari x, y, z, r dan s tak negatif yang memenuhi

$$x + y + 2z + r = 12$$
$$2x - 6y - z - s = 4$$

Memaksimumkan $f = -8x + 6y + 8z + 0r + 0s$.
Penyelesaian basis yang bersesuaian ($x = y = z = 0$) adalah

$$(x, y, z, r, s) = (0, 0, 0, 12, -4).$$

Tetapi penyelesaian ini tidak layak karena memuat nilai negatif untuk s.
Supaya tabel awal sudah memuat penyelesaian basis yang layak maka pada persamaan kedua disisipkan lagi satu peubah a sehingga kendala utama berbunyi:

$$x + y + 2z + r = 12$$
$$2x - 6y - z - s + a = 4$$

Sehingga penyelesaian layak basis (plb)nya menjadi:

$$(x, y, z, r, s, a) = (0, 0, 0, 12, 0, 4)$$

Sebelum a disisipkan, kendala berbentuk persamaan, dan setelah a disisipkan masih berbentuk persamaan. Peubah a disebut peubah semu (*artificial variable*) dan hasil akhir a harus bernilai nol. Fungsi sasaran/tujuan baru berbentuk

$\overline{f} = f - Ma$ dengan M bilangan positif yang cukup besar

Contoh 2.9:

Bentuk kanonik siap simpleks
Menentukan x, y, z, r, s, a tak negatif
Yang memenuhi

$$x + y + 2z + r = 12$$
$$2x - 6y - z - s + a = 4$$

Dan memaksimumkan

$$\overline{f} = -8x + 6y + 8z + 0r + 0s - Ma$$

LATIHAN SOAL

1. Tentukan x, y, z tak negatif yang memenuhi

   $3x + 6y + z \leq 6$

   $4x + 2y + z \leq 4$

   $6x - 3y + 3z = 10$

   dan memaksimumkan $f = 2x - 3y + z$

2. Tentukan x, y, z tak negatif dengan

   $2y - z \leq -2$

   $x + 4y + 2z = 5$

   dan memaksimumkan $f = 3x + 5y + 2z$

-oo0oo-

3

MASALAH POLA MINIMUM BAKU ATAU MINIMUM TIDAK BAKU

3.1 BENTUK UMUM PROGRAM LINEAR POLA MINIMUM BAKU ATAU MINIMUM TIDAK BAKU

Suatu masalah Program Linear berpola minimum baku, jika semua tanda ketaksamaan pada sistem/fungsi kendala bertanda "≥" dan fungsi tujuan (fungsi objektif) adalah meminimumkan.

Sehingga bentuk umum Program Linear dengan pola minimum baku sebagai berikut:

Mencari $X \geq 0$
memenuhi $AX \geq B$
meminimumkan $f = CX$

Contoh 3.1:

Tentukan x, y, z tak negatif yang meminimumkan $f = 4y + 10z$
dan memenuhi

$$-4x + y + z \geq 12$$
$$-x + y - z \geq 15$$

Suatu masalah Program Linear berpola minimum tidak baku, jika tidak semua tanda ketaksamaan pada sistem/fungsi kendala bertanda "≥" dan fungsi tujuan (fungsi objektif) adalah meminimumkan.

Contoh 3.2:

Tentukan x, y, z tak negatif yang <u>meminimumkan</u> $f = 3x + 7y + 10z$
dan memenuhi

$$-4x + y + 2z \geq 12$$
$$-x + 3y - z \leq 15$$

3.2 PENYELESAIAN MASALAH PROGRAM LINEAR BERPOLA MINIMUM

Tahapan dalam penyelesaian masalah Program Linear pola minimum baku atau pola minimum tidak baku sebagai berikut.

1. Tabel Awal

Penyisipan peubah pengetat dan peubah semu sama dengan pola maksimum, kecuali dalam menyusun fungsi sasaran/tujuan baru bila ada peubah semu yang masuk.
Bila ada peubah semu a masuk maka disusun fungsi sasaran baru

$\bar{f} = f + Ma$ (M bilangan positif besar)

2. Ciri Optimum

Berikut syarat suatu tabel dinyatakan minimum, yaitu:

Tabel sudah minimum bila $z_j - c_j \leq 0$, untuk setiap j

3. Perbaikan tabel

Untuk memilih peubah yang masuk menjadi basis, digunakan kunci I sebagai berikut.

Kunci I:	Pilih k dengan $z_k - c_k > 0$ yang terbesar maka x_k terpilih menjadi basis

Menyusun R_i seperti pola maksimum yaitu:

$R_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$ hanya untuk $a_{ik} > 0$

a_{ik} merupakan unsur kolom kunci

Untuk memilih basis yang keluar dari tabel, digunakan kunci II sebagai berikut.

Kunci II:	Pilih p dengan R_p yang terkecil, maka $\overline{x_P}$ terpilih untuk keluar dari basis

Kunci II sama dengan pola maksimum, karena tujuannya sama yaitu supaya penyelesaian basis baru tetap layak

4. Jika belum minimum masuk ke langkah 3

Berdasarkan langkah-langkah pada pola minimum di atas, berikut ini penyelesaian untuk Contoh 3.1. Yaitu:

Tentukan x, y, z tak negatif yang <u>meminimumkan</u> f = 4y + 10z
dan memenuhi

$-4x + y + z \geq 12$
$-x + y - z \geq 15$

Bentuk kanoniknya yaitu:

Tentukan x, y, z, r, s, a tak negatif yang meminimumkan

$f = 4y + 10z + 0r + 0s + Ma$

dan memenuhi

$-4x+y+z-r+a=12$
$-x+y-z+s = 15$

Dalam hal ini, peubah pengetat yaitu r dan s, serta peubah semu yaitu a.

Berikut ini penyelesaian lengkap tabel simpleks.

Tabel 1

	c_j	0	4	10	0	0	M		
c_i	Koefisien	x	y	z	r	s	a	b_i	R_i
M	a	-4	1	1	-1	0	1	12	12
0	s	-1	1	-1	0	1	0	15	15
	z_j	-4M	M	M	-M	0	M	12M	
	z_j - c_j	0	M-4	M-10	-M	0	0		

Tabel 2

	c_j	0	4	10	0	0	M		
c_i	Koefisien	x	y	z	r	s	a	b_i	R_i
4	y	-4	1	1	-1	0	1	12	
0	s	3	0	-2	1	1	-1	3	
	z_j	-16	4	4	-4	0	4	48	
	z_j - c_j	-16	0	-6	-4	0	4-M		

Penyelesaian optimum diperoleh pada Tabel 2, yaitu

$(x, y, z, r, s, a) = (0,12,0,0,3,0)$ dan nilai f minimum yaitu 48.

Beberapa kejadian penyelesaian soal Program Linear:

1. Kejadian soal tidak mempunyai penyelesaian optimum, penyebabnya:
   a. soal tidak layak
   b. soal layak tetapi f mendekati tak hingga (disebut tak terbatas)
2. Ada pilihan penyelesaian optimum (p.o)

Kejadian soal tidak mempunyai penyelesaian optimum diberikan dalam Contoh 3.3. berikut.

Contoh 3.3:

Tentukan p, q tak negatif yang memenuhi

$3p + 4q \geq 12$

$-p + 2q \leq 8$

dan meminimumkan $f = -3p + q$.

Pembahasan:

Dari pertidaksamaan tersebut, dibutuhkan peubah pengetat r dan s, serta peubah semu a. Sehingga bentuk kanonik soal diatas adalah:

Tentukan p, q, r, s, a tak negatif yang memenuhi

$$3p + 4q - r + a = 12$$

$$-p + 2q + s = 8$$

dan meminimumkan f = -3p + q + or + 0s + Ma.

Setelah diperoleh bentuk kanonik, maka siap simpleks dengan tabel simpleks lengkap berikut:

Tabel 1

	c_j	-3	1	0	0	M		
c_i	Koefisien	p	q	r	s	a	b_i	R_i
M	a	3	4	-1	0	1	12	3
0	s	-1	2	0	1	0	8	4
	z_j	3M	4M	-M	0	M	12M	
	z_j - c_j	3M+3	4M-1	-M	0	0		

Tabel 2

	c_j	-3	1	0	0	M		
c_i	Koefisien	p	q	r	s	a	b_i	R_i
1	q	0,75	1	-0,25	0	0,25	3	4
0	s	-2,5	0	0,5	1	-0,5	2	~
	z_j	0,75	1	-0,25	0	0,25	3	
	z_j - c_j	3,75	0	-0,25	0	0,25-M		

Tabel 3

	c_j	-3	1	0	0	M		
c_i	Koefisien	p	q	r	s	a	b_i	R_i
-3	p	1	1,33	-0,33	0	0,33	4	~
0	s	0	3,33	-0,33	1	0,33	12	~
	z_j	-3	-4	1	0	-1	3	
	z_j - c_j	0	-5	1	0	-1-M		

Dari tabel 3, karena unsur pada kolom yang terpilih bernilai negatif semua maka R_i tidak ada. Jadi, soal tidak mempunyai penyelesaian optimum.

Keterangan penyelesaian soal:

Dalam Tabel 3 satu-satunya calon kolom kunci adalah kolom 3, tetapi tidak ada unsur yang positif sehingga Ri tidak dapat disusun dan proses simpleks macet.
Hal ini berarti meskipun soal layak tetapi f menjadi tak terbatas sehingga soal asli tidak mempunyai penyelesaian optimum.
Jadi ciri-ciri soal Program Linear tidak mempunyai penyelesaian optimum dijelaskan sebagai berikut. Bila koefisien-koefisien teknis dalam kolom kunci tidak ada yang positif, maka f menjadi tak terbatas dan soal asli tidak mempunyai penyelesaian optimum.
Contoh lain soal tidak mempunyai penyelesaian optimum, diberikan pada Contoh 3.4. berikut.

Contoh 3.4:

Mencari x, y, z yang memenuhi

$$7x + 2y - z \leq 8$$
$$x - 3y - 2z \geq 4$$
$$3x - y + 6z \leq 5$$

Memaksimumkan $f = 5x - y + 2z$.

Pembahasan:

Dari pertidaksamaan di atas, diperlukan peubah pengetat r, s, dan t, serta peubah semu a. Sehingga diperoleh bentuk kanonik:

Mencari x, y, z, r, s, t, a yang memenuhi

$$7x + 2y - z + r = 8$$
$$x - 3y - 2z - s + a = 4$$
$$3x - y + 6z + t = 5$$

Memaksimumkan $f = 5x - y + 2z + 0r + 0s + 0t - Ma$.

Selanjutnya, soal sudah siap simpleks dan diperoleh tabel simpleks berikut.

Tabel 1

	c_j	5	-1	2	0	0	0	-M		
c_i	Koefisien	x	y	Z	r	s	t	a	b_i	R_i
0	r	7	2	-1	1	0	0	0	8	1,14
-M	a	1	-3	-2	0	-1	0	1	4	4
0	t	3	-1	6	0	0	1	0	5	1,67
	z_j	-M	3M	2M	0	M	0	-M	-4M	
	$z_j - c_j$	-M-5	3M+1	2M-2	0	M	0	0		

Tabel 1 belum optimum sehingga dilanjutkan dengan Tabel 2 berikut.

Tabel 2

	c_j	5	-1	2	0	0	0	-M		
c_i	Koefisien	x	y	Z	r	s	t	a	b_i	R_i
5	x	1	0,29	-0,14	0,14	0	0	0	1,14	
-M	a	0	-3,29	-1,86	-0,14	-1	0	1	2,86	
0	t	0	-1,86	6,43	-0,43	0	1	0	1,57	
	z_j	5	3M	2M	M	M	0	-M	-3M	
	$z_j - c_j$	0	3M+1	2M-2	M	M	0	0		

Tabel 2 sudah optimum, karena semua $z_j - c_j \geq 0$. Tetapi memuat peubah semu yaitu a = 2,86. Jadi, soal tidak mempunyai penyelesaian optimum.

Ciri lain soal Program Linear tidak layak, diberikan dalam keterangan berikut ini. Bila tabel sudah memenuhi syarat optimum tetapi masih memuat peubah semu dengan nilai positif maka soal asli tidak layak, jadi tidak mempunyai penyelesaian optimum.

Bentuk soal Program Linear yang memiliki/ada pilihan penyelesaian optimum, diberikan dengan contoh berikut.

Contoh 3.5:

Tentukan x, y, z yang memenuhi

$$2x + 2y + z \leq 22$$
$$2x + y + 2z \geq 30$$
$$y + 2z \geq 25$$

Dan meminimumkan $f = 100x + 100y + 100z$.

Pembahasan:

Berdasarkan pertidaksamaan tersebut, diperlukan peubah pengetat r, s, dan t. Demikian juga, karena terdapat pertidaksamaan dengan tanda ≥ maka ditambahkan peubah semu a dan b.

Sehingga bentuk kanonik soal tersebut yaitu:
Menentukan x, y, z, r, s, t, a, dan b yang memenuhi

$$2x + 2y + z + r = 22$$

$$2x + y + 2z - s + a = 30$$

$$y + 2z - t + b = 25$$

Dan meminimumkan $f = 100x + 100y + 100z + 0r + 0s + 0t + Ma + Mb$
Soal menjadi siap simpleks. selanjutnya, diperoleh tabel simpleks sebagai berikut.

Tabel 1

	c_j	100	100	100	0	0	0	M	M		
c_i	Koefisien	x	y	z	r	s	t	a	b	b_i	R_i
0	r	2	2	1	1	0	0	0	0	22	22
M	a	2	1	2	0	-1	0	1	0	30	15
M	b	0	1	2	0	0	-1	0	1	25	12,5
	z_j	2M	2M	4M	0	-M	-M	M	M	55M	
	z_j - c_j	2M-100	2M-100	4M-100	0	-M	-M	0	0		

Tabel 2

	c_j	100	100	100	0	0	0	M	M		
c_i	Koefisien	x	y	z	r	s	t	a	b	b_i	R_i
0	r	2	1,5	0	1	0	0,5	0	-0,5	9,5	4,75
M	a	2	0	0	0	-1	1	1	-1	5	2,5
100	z	0	0,5	1	0	0	-0,5	0	0,5	12,5	~
	z_j	2M	50	100	0	-M	M-50	M	-M+50		
	z_j - c_j	2M-100	-50	0	0	-M	M-50	0	-2M+50		

Tabel 3

	c_j	100	100	100	0	0	0	M	M		
c_i	Koefisien	x	y	z	r	s	t	a	b	b_i	R_i
0	r	0	1,5	0	1	1	-0,5	-1	0,5	4,5	
100	x	1	0	0	0	-0,5	0,5	0,5	-0,5	2,5	
100	z	0	0,5	1	0	0	-0,5	0	0,5	12,5	
	z_j	100	50	100	0	-50	0	50	0	1500	
	z_j - c_j	0	-50	0	0	-50	0	50-M	-M		

Tabel 3 sudah optimum dengan penyelesaian

$$(x, y, z, r, s, t, a, b) = (2{,}5\ ;\ 0\ ;\ 12{,}5\ ;\ 4{,}5\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0)$$

Dan meminimumkan $f = 1500$

Jadi, ciri adanya pilihan penyelesaian optimum:
Bila dalam tabel optimum x_p bukan basis dan memiliki sifat $z_p - c_p = 0$ maka ada pilihan penyelesaian optimum dan dapat ditemukan dengan memasukkan x_p ke dalam basis.

LATIHAN SOAL

Soal 1

Tentukan x, y tak negatif yang memenuhi

$x + 2y \geq 6$
$5x + 6y \leq 60$
$x - 2y = 0$

Dan meminimumkan $f = 2x - y + 5$

Soal 2

Tentukan x, y, z tak negatif dengan kendala

$$x + y - z \leq 10$$
$$-x + 3y - 3z \geq 20$$
$$5x - y + 2z \leq 5$$

Meminimumkan $f = -6x + 12y + 6z$

-oo0oo-

4

DUALITAS

Dalam beberapa bidang, misal teknik, ekonomi, geometri, terdapat hubungan dual antara dua bentuk tertentu yang berguna bagi teknik penyelesaian masalah.

Dalam Program Linear (PL) terdapat hubungan dual antara dua soal PL dan masing-masing penyelesaian optimumnya. Dengan kata lain, setiap masalah Program Linear mempunyai hubungan dengan bentuk masalah Program Linear lainnya yang disebut sebagai bentuk dual-nya. Hubungan antara masalah dual dengan masalah aslinya (yang disebut dengan primal) berguna dalam beberapa penyelesaian permasalahan.

4.1 BENTUK DUAL

Setiap persoalan program linear mempunyai suatu program yang berkaitan, yang disebut "dual". Solusi dari persoalan asli program linear (disebut Primal), juga memberikan solusi pada dualnya.

Secara umum jika masalah Program Linear Primal dinyatakan dalam bentuk baku berikut:

mencari $X \geq 0$ yang memenuhi $AX \leq B$ dan memaksimumkan $f = CX$

maka Program Linear Dual dinyatakan dalam bentuk baku berikut:

mencari $W \geq 0$ yang memenuhi $A'W \geq C'$ dan meminimumkan $g = B'W$

dengan A', B' dan C' adalah matriks transpos.

Dari pola Masalah PL, kendala utama PL dapat memuat kendala-kendala

" ≤, ≥, atau = ".

Untuk algoritma simpleks, kendala utama yang memuat tanda-tanda pertidaksamaan seperti di atas, semua kendala tersebut dibawa ke bentuk persamaan (memuat tanda "="). Sedangkan, untuk masalah dualitas, kendala utama diubah sedemikian sehingga semua kendala utama berbentuk "≤" atau semuanya berbentuk " ≥".

Dengan kata lain, dapat diperoleh susunan pola maksimum baku dan pola minimum baku sebagai berikut:

1. Pola maksimum baku:

   Mencari $X \geq 0$
   memenuhi $AX \leq B$
   memaksimumkan $f = CX$

2. Pola minimum baku:

   Mencari $X \geq 0$
   memenuhi $AX \geq B$
   meminimumkan $f = CX$

Berikut ini diberikan permasalahan yang merupakan soal dual.

Contoh 4.1:

Penyedia makanan suatu asrama tentara harus memperhatikan masalah ramuan sebagai berikut.

Menentukan banyaknya dua jenis makanan M_1 dan M_2 yang harus dibelinya setiap hari dengan syarat-syarat vitamin minimum yang harus dipenuhi bila ia juga ingin menghemat pengeluaran total. Disajikan dalam tabel berikut:

Vitamin	Jenis Makanan		Tuntutan minimum
	M_1	M_2	
A	2	4	≥ 40
B	3	2	≥ 50
C	4	1	≥ 30
Harga	300	260	

Gambar 4.1. *Tabel Kandungan Vitamin*

Pada kesempatan lain serombongan tentara harus berangkat ke medan perang dan M_1 ,M_2 sulit diperoleh di lapangan.

Maka seorang pengusaha farmasi harus menyediakan pengganti dalam bentuk kapsul vitamin A, B dan C dengan syarat harga vitamin penyusun M_1 tidak boleh melebihi anggaran untuk M_1 yaitu 300, demikian untuk M_2, sedangkan pengusaha ingin memaksimumkan penerimaannya.

Dari persoalan tersebut di atas, terdapat dua permasalahan yang dihadapi, yaitu oleh pihak penyedia makanan dan pihak penyedia vitamin (pengusaha farmasi/obat-obatan).

Masalah bagi penyedia makanan dapat dirumuskan sebagai berikut:

Menentukan

m_1: banyaknya unit M_1 yang harus dibeli/hari

m_2: banyaknya unit M_2 yang harus dibeli/hari

Memenuhi

$$2m_1 + 4m_2 \geq 40$$

$$3m_1 + 2m_2 \geq 50$$

$$4m_1 + m_2 \geq 30$$

Meminimumkan $f = 300\ m_1 + 250\ m_2$

Dari perumusan di atas, masalah bagi penyedia makanan **berpola minimum baku.**

Masalah bagi pengusaha farmasi dapat dirumuskan sebagai berikut:

Menentukan a, b dan c berturut-turut adalah harga satuan vitamin A, B dan C yang memenuhi

$$2a + 3b + 4c \leq 300$$
$$4a + 2b + c \leq 250$$

Memaksimumkan

$$g = 40a + 50b + 30c$$

(yaitu penerimaan harian baginya)

Dari perumusan tersebut, masalah bagi pengusaha farmasi **berpola maksimum baku.**

Masalah kedua ini adalah dual terhadap masalah pertama. Karena masalah pertama diberikan dulu maka disebut primal sedangkan masalah kedua disebut dual.

Hubungan dual persoalan di atas ditunjukkan dengan tabel dualitas berikut ini.

	M_1	M_2	Maks g
a	2	4	≥ 40
b	3	2	≥ 50
c	4	1	≥ 30
Min f	≤ 300	≤ 260	

Gambar 4.2. *Tabel Dualitas*

Beberapa hal yang dapat dipahami dari tabel dualitas tersebut, yaitu:

1. Bila tabel dibaca ke kanan diperoleh soal primal dan bila tabel dibaca ke bawah diperoleh soal dual.
2. Dalam tabel terlihat kaitan antara koefisien ongkos dan suku tetap, juga antara kendala dan peubah dualnya, sebagai berikut:

Primal	Dual
Matriks koefisien teknis	Transpos matriks koefisien teknis
Suku tetap	Koefisien ongkos
Koefisien ongkos	Suku tetap
Kendala ke-i	Perubahan ke-i
Perubahan ke-i	Kendala ke-i
Pola minimum	Pola maksimum

Gambar 4.3. *Tabel Primal Dual*

4.2 DALIL-DALIL DUALITAS

Dalam bagian ini, dibahas konsep-konsep dualitas yang digunakan dalam penyelesaian masalah Program Linear untuk bentuk primal maupun dualnya. Hubungan primal dual dapat dinyatakan secara ringkas dalam tabel berikut.

Primal	Dual
Batasan *i*	Variabel *i*
Fungsi Tujuan	Nilai Kanan

Gambar 4.4. *Ringkasan primal dual*

Jadi, masalah dual menggunakan parameter-parameter yang sama dengan bentuk primal. Dari tabel 4.4 dapat dijelaskan hal-hal sebagai berikut:

1. Bagaimana parameter pada suatu kendala masalah yang satu merupakan koefisien satu variabel masalah yang lainnya.
2. Bagaimana koefisien pada fungsi tujuan (fungsi obyektif) masalah yang satu merupakan nilai kanan masalah yang lainnya.

Konsep dualitas dapat dirumuskan sebagai berikut:

Dengan A matriks berukuran mxn

Soal primal (P):

mencari $X \geq 0$, $AX \leq B$, maks. $f = CX$

Soal dual (D):

mencari $W \geq 0$, $A'W \geq C'$, min $g = B'W$

dengan A′, B′ dan C′ adalah matriks transpos

Berikut diberikan dalil dualitas:

1. Jika peubah pada kendala ke-k pada soal primal bernilai positif (>0) maka pada kendala ke-k soal dual berbentuk persamaan (demikian juga sebaliknya)
2. Jika peubah pada soal primal bernilai nol maka kendala pada soal dual berupa pertidaksamaan (demikian juga sebaliknya)

Dari persoalan pada contoh di atas, penyelesaian soal dual dapat dijelaskan sebagai berikut:

1. Soal primal memuat 2 peubah dan soal dual memuat 3 peubah. Maka dipilih soal primal untuk diselesaikan secara grafik.
2. Soal primal:
   mencari m_1, m_2 tak negatif memenuhi

   $$2m_1 + 4m_2 \geq 40$$
   $$3m_1 + 2m_2 \geq 50$$
   $$4m_1 + m_2 \geq 30$$

   meminimumkan $f = 300m_1 + 250m_2$.

Setelah diselesaikan dengan grafik, diperoleh penyelesaian optimum $(m_1, m_2) = (15, 2\,\tfrac{1}{2})$ dengan nilai program f minimum = 5125.

Jika nilai tersebut dimasukkan dalam kendala utama, diperoleh:

$$2(15) + 4(2\,\tfrac{1}{2}) = 40 = 40 \text{ (persamaan)}$$
$$3(15) + 2(2\,\tfrac{1}{2}) = 50 = 50 \text{ (persamaan)}$$
$$4(15) + 1(2\,\tfrac{1}{2}) = 62\,\tfrac{1}{2} > 30 \text{ (pertidaksamaan)}$$

Sedangkan nilai peubahnya menjadi:

$m_1 = 15 > 0$ dan $m_2 = 2\,\tfrac{1}{2} > 0$

yang berupa pertidaksamaan.

Dengan dalil dualitas, diperoleh hal-hal yang terdapat dalam tabel sebagai berikut:

Soal primal	**Soal dual**
Kendala (1) persamaan	Peubah ke-1 pertidaksamaan
Kendala (2) persamaan	Peubah ke-2 pertidaksamaan
Kendala (3) pertidaksamaan	Peubah ke-3 persamaan
Peubah ke-1 pertidaksamaan	Kendala (1) persamaan
Peubah ke-2 pertidaksamaan	Kendala (2) persamaan

Gambar 4.5. *Tabel Kaitan Primal Dual*

Hubungan di atas dapat dinyatakan dengan nilai-nilai yang diberikan seperti dalam tabel berikut:

	$m_1 > 0$	$m_2 > 0$	
$0 < a$	2	4	$= 40$
$0 < b$	3	2	$= 50$
$0 = c$	4	1	> 30
	$= 300$	$= 250$	

Gambar 4.6. *Tabel Penyelesaian Primal-Dual*

Dari tabel 6, diperoleh bahwa untuk menghitung penyelesaian optimum soal dual tersebut, cukup dengan menghitung nilai a, b, c dari ketiga persamaan yang timbul, yaitu:

$2a + 3b + 4c = 300$

$4a + 2b + c = 250$

$c = 0$

Dengan eliminasi pada sistem persamaan di atas diperoleh penyelesaian sebagai berikut:

$(a, b, c) = (18\tfrac{3}{4}, 87\tfrac{1}{2}, 0)$

dengan g maksimum = f minimum = 5125 .

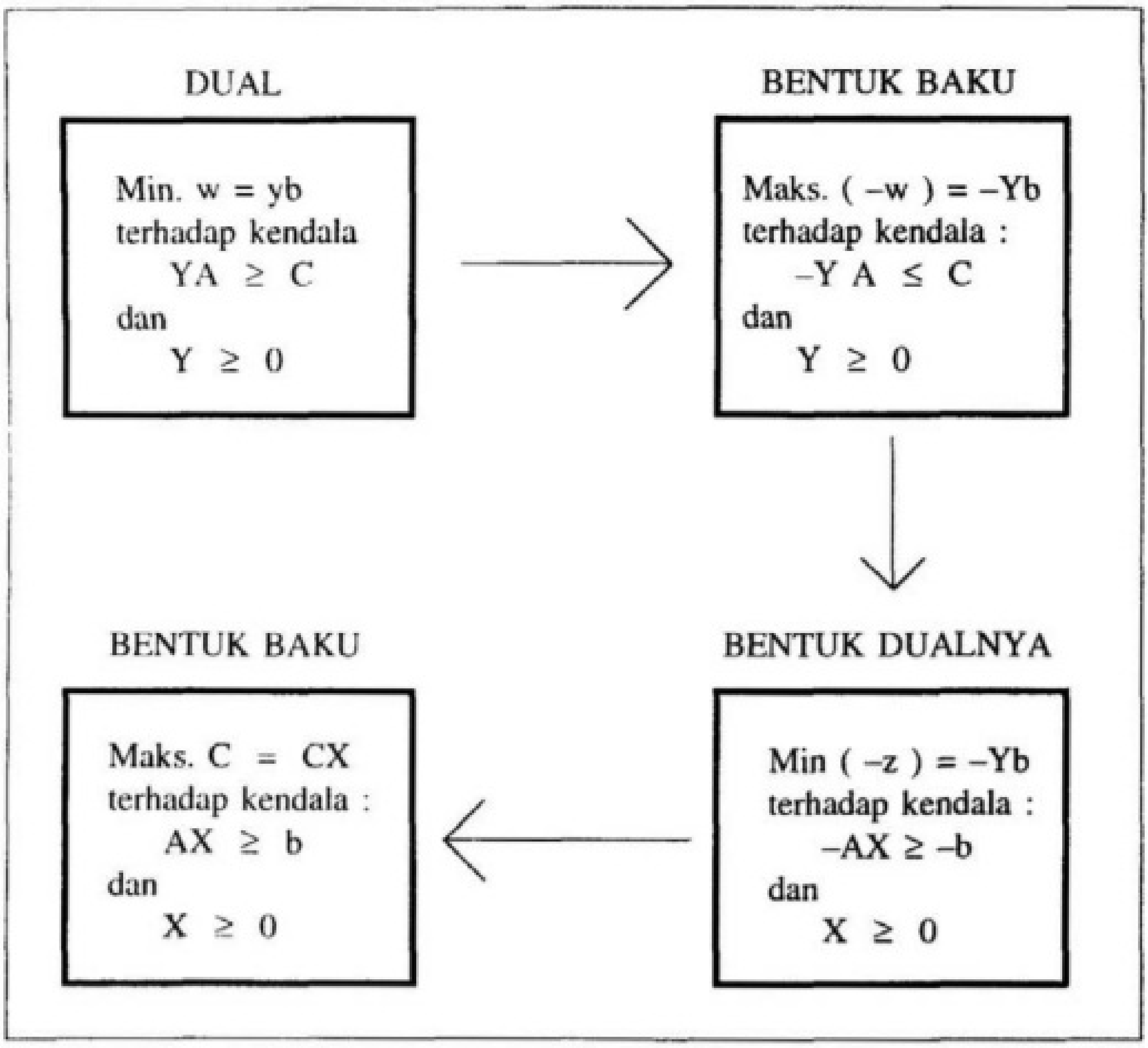
Permasalahan Program Linear primal dual tidak selalu merupakan pola maksimum atau minimum baku. Adakalanya ditemukan permasalahan program linear berpola maksimum tidak baku atau minimum tidak baku. Untuk itu, perlu dibuat langkah mengubahnya ke bentuk baku, sehingga permasalahan program linear tersebut dapat diselesaikan, khususnya terkait dualitas.

Berikut ini tabel yang menunjukkan cara mengubah model program linear berpola tak baku menjadi bentuk baku.

Bentuk tak-baku	**Bentuk Baku**
Minimumkan Z	**Maksimumkan (–Z)**
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq b_i$	$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq b_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i$ dan $-\sum_{j>1}^{n} a_{ij} X_j \leq -b_i$
X_j **tak terbatas**	$(X'_j - X''_j) ; X_j', X_j'' \geq 0$

Gambar 4.7. *Pengubahan Bentuk Tak Baku ke Bentuk Baku (Taha, 2003)*

Proses pengubahan bentuk tak baku ke bentuk baku, dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 4.8. *Pengubahan dari Bentuk Tak Baku ke Baku (Taha, 2003)*

Hasil pengubahan pada Gambar 4.8 tersebut adalah suatu bentuk primal, yang berarti bahwa dual dari suatu bentuk dual adalah bentuk primalnya. Jadi untuk suatu model tidak menjadi masalah mana yang merupakan bentuk primalnya dan mana yang merupakan bentuk dualnya. Kesepakatan yang bisa dipahami adalah bahwa model yang disebutkan terlebih dulu merupakan bentuk primalnya.

Berikut ini akan dibahas pengubahan bentuk primal ke bentuk dual tak baku berikut ini.

Contoh 4.2:

Maksimumkan $Z = 4x + 5y$

Terhadap kendala:

$$
\begin{aligned}
&3x + 2y \leq 20 \\
&4x - 3y \geq 10 \\
&x + y = 5 \\
&x \geq 0,\ y \text{ tak terbatas}
\end{aligned}
$$

Apabila ingin mengubah bentuk primal tersebut ke bentuk dual, maka bentuk primal tersebut perlu diubah terlebih dulu ke bentuk bakunya.

Maksimumkan $Z = 4x + 5y' - 5y''$

terhadap kendala:

$$
\begin{aligned}
&3x + 2y' - 2y'' \leq 20 \\
&-4x + 3y' - 3y'' \leq 10 \\
&x + y' - y'' \leq 5 \\
&-x - y' + y'' \leq -5 \\
&x, y', y'' >
\end{aligned}
$$

Berdasarkan bentuk baku tersebut diperoleh bentuk dual sebagai berikut:

Meminimumkan $W = 20a - 10b + 5c - 5d$

Terhadap kendala:

$$
\begin{aligned}
&3a - 4b + c - d \geq 4 \\
&2a - 3b + c - d \geq 5 \\
&2a - 3b - c + d \geq -5
\end{aligned}
$$

dengan $a, b, c, d \geq 0$

Bila bentuk dual yang diperoleh tersebut dimodifikasi, maka akan diperoleh bentuk berikut:

Bila $c - d = c'$, kendala ke-3 dikalikan dengan -1 dan kendala ke-2 dan ke-3 digabung, serta nilai koefisien variabel kedua diubah, maka diperoleh:

Minimumkan W = 20a + 10b + 5c′

Terhadap kendala:

$3a + 4b + c' \geq 4$
$2a + 3b + c' = 5$
$a \geq 0$, $b \geq 0$, c′ tak terbatas.

Bila diperhatikan bentuk perubahan pada pembahasan di atas, maka diperoleh bentuk umum hubungan primal-dual yang dapat berlaku bagi semua masalah Program Linear, baik yang berupa bentuk baku maupun yang tak baku. Bentuk hubungan yang dimaksud, terdapat dalam tabel berikut.

PRIMAL	DUAL
A elemen matriks kendala b vektor solusi C koefisien fungsi tujuan kendala ke j persamaan X_j tak terbatas	transpose elemen matriks kendala koefisien fungsi tujuan vektor solusi variabel Y_i tak terbatas kendala ke j persamaan
MAKSIMISASI	**MINIMISASI**
Kendala ke i $\leq$ Kendala ke i $\geq$ $X_j \geq 0$ $X_j \leq 0$	variabel $Y_i \geq 0$ variabel $Y_i \leq 0$ kendala ke j $\geq$ kendala ke j $\leq$
MINIMISASI	**MAKSIMISASI**
Kendala ke j $\leq$ Kendala ke j $\geq$ $X_j \geq 0$ $X_j \leq 0$	variabel Y, ≤ 0 variabel $Y_i \leq 0$ kendala ke j $\leq$ kendala ke j $\geq$

Gambar 4.9. *Hubungan Primal Dual Secara Umum (Susanta, 1994)*

Arti ekonomi dari suatu masalah Primal Dual diberikan dalam tabel berikut.

Jumlah	A r t i
X_j	Tingkat aktivitas j (j=1,2,...,n)
C_j	Satuan keuntungan dari aktivitas j
Z	Total keuntungan dari semua aktivitas
b_i	Jumlah sumber daya i yang tersedia (i=1,2, ...,m)
a_{ij}	Jumlah sumber daya yang dikonsumsi oleh setiap satuan aktivitas j

Gambar 4.10 *Arti Ekonomi Masalah Primal (Taha, 2003)*

Keterangan dari Gambar 4.10 dapat diuraikan sebagai berikut:

Y_i diartikan sebagai sumbangan terhadap nilai keuntungan dari setiap satuan sumber daya ke i bila nilai variabel dasar pada saat itu digunakan untuk memperoleh solusi primal

$\sum a_{ij}Y_i$ diartikan sebagai sumbangan terhadap nilai keuntungan pada saat itu dari penggunaan sumber daya-sumber daya yang dikonsumsi bila satu satuan aktivitas j digunakan (j=1, 2, ..., n)

$\sum a_{ij}Y_i \geq C_j$ menyatakan bahwa sumbangan terhadap keuntungan dari penggunaan sumber daya minimal sebesar yang digunakan oleh satu satuan aktivitas j. Bila tidak, maka itu bukan penggunaan terbaik dari sumber-sumber daya tersebut

$Y_i \geq 0$ menyatakan bahwa sumbangan terhadap keuntungan dari sumber daya ke i (i= 1, 2, ..., m) harus tak negatif. Bila tidak, lebih baik sama sekali tidak menggunakan sumber daya tersebut.

Berikut ini diberikan contoh lain permasalahan dualitas. Salah satu persoalan (primal atau dual) diselesaikan dengan metode simpleks.

Contoh 4.3.

Diberikan soal berikut:

Tentukan x, y, z tak negatif yang memenuhi

$$x + y + 2z \leq 12$$
$$2x - 6y - z \geq 4$$

dan memaksimumkan $f = -8x + 6y + 8z$.

a. Selesaikan soal tersebut.
b. Tentukan dual dan penyelesaian optimum soal dualnya.

Pembahasan:

Sistem pertidaksamaan pada fungsi kendala terdiri dari dua pertidaksamaan yang masing-masing bertanda ≤ dan ≥. Oleh karena itu, dengan menambah peubah pengetat r, s dan peubah semu a, diperoleh bentuk kanonik berikut.

Menentukan x, y, z, r, s, dan a yang memenuhi

$$x + y + 2z + r = 12$$
$$2x - 6y - z - s + a = 4$$

Memaksimumkan $f = -8x + 6y + 8z + 0r + 0s - Ma$

Soal tersebut siap simpleks dan berikut ini penyelesaiannya dengan tabel simpleks.

Tabel 1

	c_j	-8	6	8	0	0	-M		
c_i	koefisien	X	y	z	r	s	A	b_i	R_i
0	r	1	1	2	1	0	0	12	12
-M	a	2	-6	-1	0	-1	1	4	2,00
	z_j	-2M	6M	M	0	M	-M	-4M	
	z_j - c_j	-2M+8	6M-6	M-8	0	M	0		

Tabel 2

	c_j	-8	6	8	0	0	-M		
c_i	koefisien	X	y	z	r	s	a	b_i	R_i
0	r	0	4	2,5	1	0,5	-0,5	10	4
-8	x	1	-3	-0,5	0	-0,5	0,5	2	~
	z_j	-8	24	4	0	4	-4	-16	
	z_j - c_j	0	18	-4	0	4	-4+M		

Tabel 3

	c_j	-8	6	8	0	0	-M		
c_i	koefisien	X	y	z	r	s	a	b_i	R_i
8	z	0	1,6	1	0,4	0,2	-0,2	4	4
-8	x	1	-2,2	0	0,2	-0,4	0,4	4	~
	z_j	-8	30,4	8	1,6	4,8	-4,8	0	
	z_j - c_j	0	24,4	0	1,6	4,8	-4,8+M		

Tabel 3 sudah optimum. Jadi penyelesaiannya adalah (x,y,z,r,s,a) = (4,0,4,0,0,0). Dan, kembali ke soal semula maka diperoleh penyelesaian (x,y,z)=(4,0,4) dengan f maksimum = 0.

Sedangkan, bentuk dual dirumuskan sebagai berikut:

Menentukan a, b tak negatif yang memenuhi

$a - 2b \geq -8$

$a + 6b \geq 6$

$2a + b \geq 8$

dan meminimumkan $g = 12a - 4b$.

Penyelesaian soal dua dapat diperoleh dari Tabel 3 tersebut, yaitu nilai di bawah peubah pengetat. Dalam persoalan dual, peubah pengetat pola maksimum yaitu r dan s. Jadi, diperoleh (a, b) = (1,6 ; 4,8) dan g minimum = f maksimum = 0.

Contoh 4.4.

Tentukan u, v, w tak negatif yang memenuhi

$$-2u - v + w \geq 1$$
$$2u - v \leq 1$$
$$u - w \geq 1$$

Meminimumkan $f = 4u - 2w$

a. Tentukan penyelesaiannya
b. Buatlah dualnya dan selesaikan

Pembahasan:

Dengan menambahkan peubah pengetat r dan s, serta peubah semu a dan b, diperoleh bentuk kanonik berikut:

Tentukan u, v, w tak negatif yang memenuhi

$$-2u - v + w - r + a = 1$$
$$2u - v + s = 1$$
$$u - w - t + b = 1$$

Meminimumkan $f = 4u - 2w + 0r + 0s + 0t + Ma + Mb$

LATIHAN SOAL

1. Ubahlah bentuk primal berikut ini ke bentuk dual.
   a. Memaksimumkan $Z = 2x + 7y + 4z$
      Terhadap kendala:

      $$x + 2y + z \leq 10$$
      $$3x + 3y + 2z \leq 10$$
      $$x, y, z \geq 0$$

   b. Memaksimumkan $Z = -x - 2y - z$
      Terhadap kendala:

      $$x + y + 2z \leq 1$$
      $$2x - z \leq 1$$
      $$x, y, z \geq 0$$

c. Meminimumkan $Z = 3x + 5y - 8z$
   Terhadap kendala:
   $x - 2y + 3z \le 12$
   $x + 3y - z \ge 7$
   $x, y \ge 0$, z tak terbatas

2. Tentukan u, v, w tak negatif yang memenuhi
   $-2u - v + w \ge 1$
   $2u - v \le 1$
   $u - w \ge 1$
   Meminimumkan $f = 4u - 2w$

3. Tentukan penyelesaian optimum primal dan dual dari masalah dengan model matematika berikut ini:
   Memaksimumkan $Z = 6x + 8y$
   Terhadap kendala:
   $5x + 2y \le 20$
   $x + 2y \le 10$
   $x, y \ge 0$

-oo0oo-

DAFTAR PUSTAKA

Susanta, B. (1994). *Program Linear.* Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Taha, H. A. (2003). *Operations Research: An Introduction 7th edition*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

https://repository.unikom.ac.id/31151/1/Materi%201.pdf diakses pada 12 Agustus 2019.

-oo0oo-

METODE GRAFIK DAN SIMPLEKS

Dalam Penyelesaian Masalah Program Linear

Program linear merupakan suatu teknik optimalisasi dengan variabel-variabelnya linear. Program Linear dipakai saat dihadapkan pada permasalahan dengan suatu keputusan yang memiliki beberapa pilihan dengan batasan-batasan tertentu dan menghendaki keputusan yang optimum (maksimum atau minimum). Program linear berkaitan dengan penjelasan suatu kasus dalam dunia nyata sebagai suatu model matematika yang terdiri dari sebuah fungsi tujuan linear dengan beberapa kendala linear. Program linear meliputi perencanaan aktivitas untuk mendapatkan hasil optimal, yaitu sebuah hasil yang mencapai tujuan terbaik (menurut model matematika) diantara semua kemungkinan alternatif yang ada.

Buku ini mengulas penyelesaian permasalahan Program Linear yang meliputi Formulasi Permasalahan dan Pemodelan, Program Linear dengan Metode Grafik, Program Linear dengan Metode Simpleks, dan Dualitas. Diharapkan pembaca memahami beberapa bentuk permasalahan dan strategi penyelesaian permasalahan dalam Program Linear serta dapat memanfaatkannya untuk menyelesaikan masalah yang sederhana dalam kehidupan sehari-hari, mampu berpikir logis dan bernalar secara matematika dalam menyelesaikan masalah.

Gregoria Ariyanti, lahir di Pontianak pada 2 Januari 1974. Telah menempuh S1 Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma Yogyakarta tahun 1992 – 1997, S2 Matematika UGM tahun 2002 - 2005, dan S3 Matematika UGM tahun 2011 - 2018. Sejak tahun 1998 sampai dengan sekarang menjadi dosen Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Katolik Widya Mandala Surabaya Kampus Kota Madiun. Bidang yang ditekuni yaitu Aljabar dan Pembelajaran Matematika.

eISBN: 978-623-228-845-4

9 786232 288454

GRAHA ILMU