https://mail.yahoo.com/d/search/keyword=jmsilogisme/messages/7220?.intl=id&.lang=id-ID&pspid=965640046&activity=ybar-mail&guce_refer

BERITA KEUANGAN OLAHRAGA SELEB LIFESTYLE LAINNYA... y!mail+ Tingkatkan Sekarang

jmsilogisme Lanjutan gregoria Awal

Kembali Arsipkan Pindahkan Hapus Spam

Artikel Edisi Desember 2018 4 Yahoo/Terkirim

Manager Silogisme <jmsilogisme@gmail.com>
Kepada: ariyanti_gregoria@yahoo.com
Kam, 22 Nov 2018 jam 11.52

Dear,
Gregoria Ariyanti

Selamat siang, kami dari tim redaksi Jurnal Silogisme memberitahukan bahwa artikel Ibu telah melalui tahap review. Mohon untuk segera melakukan revisi, agar bisa terbit pada edisi Desember 2018. Terimakasih

--
Best Regards

Jurnal Silogisme: Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya
Prodi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Muhammadiyah Ponorogo
Jl. Budi Utomo No.10 Ponorogo Jawa Timur 63471 Indonesia

gregoria ariyanti <ariyanti_gregoria@yahoo.com>
Kepada: Manager Silogisme
Jum, 23 Nov 2018 jam 08.16

https://mail.yahoo.com/d/search/keyword=jmsilogisme/messages/7220?.intl=id&.lang=id-ID&pspid=965640046&activity=ybar-mail&guce_refer

BERITA KEUANGAN OLAHRAGA SELEB LIFESTYLE LAINNYA... y!mail+ Tingkatkan Sekarang

jmsilogisme Lanjutan gregoria Awal

Kembali Arsipkan Pindahkan Hapus Spam

gregoria ariyanti <ariyanti_gregoria@yahoo.com>
Kepada: Manager Silogisme
Jum, 23 Nov 2018 jam 08.16

Terima kasih informasinya, akan segera saya revisi.

Salam hormat,
Gregoria Ariyanti

> Tampilkan pesan asli

Manager Silogisme <jmsilogisme@gmail.com>
Kepada: gregoria ariyanti
Kam, 3 Jan 2019 jam 12.03

Dear Gregoria Ariyanti

Sehubungan dengan akan diterbitkannya Jurnal Silogisme Vol 3 No 2 Bulan Desember, kami memohon kepada author untuk mengisi surat keaslian karya demi kelengkapan administrasi terbitan edisi Desember. Adapun format surat keaslian karya terlampir.

> Tampilkan pesan asli

 ISSN: 2548-7809

Karakterisasi Determinan Matriks atas Aljabar Maks Plus Tersimetri

Abstrak

Aljabar maks plus merupakan suatu struktur aljabar $(\mathbb{R}_{\varepsilon},\oplus,\otimes)$ yang tidak mempunyaielemen invers terhadap operasi $\oplus$. Dengan kata lain, jika $a\in\mathbb{R}_{\varepsilon}$ maka tidak ada $b\in\mathbb{R}_{\varepsilon}$ sehingga $a\oplus b = b\oplus a = \varepsilon$, kecuali jika $a = \varepsilon$.Oleh karena itu, dikembangkan suatu struktur yang lebih luas yang disebut aljabar maks plus tersimetri, dinotasikan dengan $(\mathbb{S},\oplus,\otimes)$ dengan $\mathbb{S} = \left(\mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}\right)/\mathcal{B}$di mana $\mathcal{B}$ suatu relasi ekuivalensi.Dengan adanya struktur ini, maka elemen di dalam aljabar maks plus tersimetri akan mempunyai elemen negatif terhadap operasi $\oplus$. Akibatnya, determinan matriks atas aljabar maks plus tersimetri dapat didefinisikan. Dalam tulisan ini akan dikembangkan karakterisasi determinan matriks atas aljabar maks plus tersimetri, khususnya di dalam hubungannya dengan adjoint. Hasil utama yang diperoleh yaitu untuk suatu $A \in M_n(\mathbb{S})$ dengan $\mathbb{S}$ aljabar maks plus tersimetri, elemen nol ε dan elemen identitas $e$berlaku sifat $\det(A) \otimes E_n \nabla A \otimes adj(A) \nabla adj(A) \otimes A$, di mana notasi "$\nabla$" menyatakan relasi setimbang.

Kata Kunci: *aljabar maks plus, aljabar maks plus tersimetri, determinan, adjoin.*

1. Pendahuluan

Aljabar maks plus adalah suatu struktur aljabar yang terdiri dari himpunan$\mathbb{R}_{\varepsilon} = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$dengan $\varepsilon := -\infty$, dilengkapi operasi biner$\oplus$ dan $\otimes$yang didefinisikan sebagai berikut :

$$a\oplus b := \max(a,b)$$
$$a\otimes b := a + b.$$

untuk setiap$a, b\in\mathbb{R}_{\varepsilon}$.

Aljabar maks plus merupakansalah satu contoh struktur semiring dengan setiap elemen yang bukan εtidak mempunyai invers terhadap $\oplus$. Dengan kata lain, jika $a\in\mathbb{R}_{\varepsilon}$ maka tidak ada $b\in\mathbb{R}_{\varepsilon}$ sehingga $a\oplus b = b\oplus a = \varepsilon$, kecuali jika $a = \varepsilon$.Sebagai akibatnya, persamaan$x\oplus 3 = 2$ dalam aljabar maks plus tidak mempunyai penyelesaian karena tidak ada suatu nilai x yang memenuhi maks $(x,3) = 2$. Hal tersebut merupakan salah satu alasan aljabar maks plus dikembangkan menjadi himpunan yang lebih luas yang disebut aljabar max plus tersimetri (*the symmetrized max-plus algebra*), yang dinotasikan dengan $(\mathbb{S}, \oplus, \otimes)$ ([3], [5], [6]).

Di dalam aljabar maks plus, invers matriks terbatas hanya ada untukkelas-kelas kecil dari matriks, yaitu matriks yang dapat dinyatakansebagai hasilkali dari matriks diagonal dan matriks permutasi. Dengan kata lain, invers suatu matriks atas aljabar maks plus sangat sederhana, yaitu hanya untuk matriks yang memuat satu unsur bukan ε dalam setiap baris dan kolomnya. Karena dalam aljabar maks plus tersimetri, invers suatu matriks dapat dikarakteristikkan dengan determinan (yang berbeda dengan aljabar maks plus) maka penulis tertarik untuk menyelidiki hal-hal yang terkait determinan suatu matriks atas aljabar maks plus tersimetri.

Commented [Office1]: Abstrak diupayakan tidak memuat terlalu banyak simbol

Commented [Office2]: apa beda elemen invers dan elemen negatif padahal operasinya sama.

Commented [Office3]: menyambung elemen invers di atas

Commented [Office4]: Gunakan equation editor. Apakah harus epsilon -inf, mengapa tidak dibiarkan sebagai elemen khusus dengan sifat khusus.

Commented [Office5]: ini juga sama utk formula gunakan equation editor

Commented [Office6]: belum ada penjelasan ttg makna istilah ini

Commented [Office7]: mungkin bisa dijelaskan dengan contoh trivial untuk a=epsilon dan a bukan epsilon.

Commented [Office8]: Aljabar maks bukan hanya sekedar himpunan tapi sebuah struktur.

Commented [Office9]: Istilah terbatas memiliki makna ganda di sini, mungkin lebih baik dihilangkan saja.

Commented [Office10]: Dipertajam lagi redaksinya

Commented [Office11]: Masih berkaitan dgn yg sebelumnya, argumen melangkah ke aljabar plus tersimetri dari aljabar plus biasa masih lemah.-->bisa diperkuat lagi.

 ISSN: 2548-7809

Perlu dijelaskan apa beda, termasuk kelemahan2nya matriks atas real biasa terhadap matriks atas struktur aljabar yang di~~Anda~~bahas di sini????

Formatted: Font color: Red

Formatted: Font color: Red

2. Aljabar Maks Plus Tersimetri

Berikut ini dibahas pembentukan aljabar maks plus tersimetri yang diawali dengan pembentukan himpunan pasangan berurutan atas aljabar maks plus.

Definition2.1[4] Diberikan himpunan pasangan berurutan $\mathbb{R}_{\varepsilon}^{2} = \mathbb{R}_{\varepsilon} \times \mathbb{R}_{\varepsilon}$ dengan operasi ⊕ dan ⊗ yang didefinisikan sebagai berikut :

$$(x, y) \oplus (w, z) = (x \oplus w, y \oplus z)$$
$$(x, y) \otimes (w, z) = (x \otimes w \oplus y \otimes z, x \otimes z \oplus y \otimes w)$$

Untuk $(x, y), (w, z) \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}$, dengan operasi ⊕ dan ⊗ pada ruas kanan bersesuaian dengan maksimum dan penjumlahan yang didefinisikan dalam aljabar maks plus. Elemen (ε,ε) adalah identitas penjumlahan ⊕ dan elemen (e,ε) adalah identitas perkalian ⊗.

Commented [Office12]: apa e istu sendiri?

Lemma 2.2 [4] Operasi ⊕dalam$\mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}$ bersifat asosiatif, komutatif dan idempoten, dan elemen nolnya adalah (ε, ε). Operasi ⊗ bersifat asosiatif, komutatif dan distributif terhadap ⊕, elemen identitas dari ⊗ adalah (e,ε) dan elemen nolnya adalah (ε,ε) yang juga merupakan elemen penyerap untuk ⊗.Struktur ($\mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}$,⊕, ⊗) disebut aljabar pasangan (*the algebra of pairs*).

Commented [Office13]: dalam --> di dalam

Commented [Office14]:

Commented [Office15]: apa yang dimaksud elemen penyerap, jelaskan bedanya dari elemen identitas, invers, elemen negatif.

Definisi 2.3. [4] Untuk u = (x,y) $\in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}$, operator minus aljabar maks plus ⊖ dan operator kesetimbangan (*balance operator*)$(\cdot)^{\bullet}$ didefinisikan sebagai berikut :
$\ominus u = (y, x)$ dan $u^{\bullet} = u \oplus (\ominus u)$.

Commented [Office16]: Bisa dipertegas bahwa "O-minus" sebagai counterpart dari "O-plus"

Lemma 2.4 [4] Untuk $u, v \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}$ berlaku :

a. $u^{\bullet} = (\ominus u)^{\bullet} = (u^{\bullet})^{\bullet}$
b. $u \otimes v^{\bullet} = (u \otimes v)^{\bullet}$
c. $\ominus (\ominus u) = u$
d. $\ominus (u \oplus v) = (\ominus u) \oplus (\ominus v)$
e. $\ominus (u \otimes v) = (\ominus u) \otimes v$

Definisi 2.5 [4] Diberikan $u = (x, y), v = (w, z) \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}$. Dikatakan bahwa u setimbang (*balance*) terhadap v,dinotasikan dengan $u \nabla v$, jika $x \oplus z = y \oplus w$.
Adakah kemiripan setimbang dengan dua bilangan rasional yang sekelas??? Apakah relasi setimbang membentuk relasi ekuivalensi???

Commented [Office17]: Diperhatikan lagi redaksinya, sebagai saran kalimatnya dapat diubah menjadi '"Elemen u dikatakan setimbang ...."

Formatted: Font color: Red

Lemma 2.6 Relasi setimbang bersifat refleksif dan simetris tetapi tidak transitif.

Commented [Office18]:

Commented [Office19]: diberi notasi operai setimbang "del/nabla"

Commented [Office20]: ini tanda akhir bukti, padahal lemma tdk dibuktikan

Karena relasi setimbang bukan relasi ekuivalensi maka tidak dapat digunakan untuk mendefinisikan himpunan faktor (*the quotient set*) dari $\mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}$ oleh ∇.
Selanjutnya, diberikan relasi$\mathcal{B}$yang didefinisikan sebagai berikut :
untuk u= (x,y), v = (w,z)$\in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}$. maka

Commented [Office21]: Diperjelas maksud kalimat ini

$$(x,y)\ \mathcal{B}\ (w,z)\ \text{jika}\begin{cases}(x,y)\nabla(w,z) \text{jika } x \neq y \text{ dan } w \neq z \\ (x,y) = (w,z) \text{untuk lainnya}\end{cases}.$$

Lemma 2.7 [4] Relasi $\mathcal{B}$pada persamaanadalah relasi ekuivalensi pada $\mathbb{R}_\varepsilon^2$.□

Karena merupakan relasi ekuivalensi, maka dapat dibentuk kelas ekuivalensi yang dibangun oleh $\mathcal{B}$, sehingga dapat didefinisikan himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon^2/_{\mathcal{B}}$yang terdiri dari kelas-kelas ekuivalensi. TetapkanHimpunan $\mathbb{S} := \mathbb{R}_\varepsilon^2/_{\mathcal{B}}$dinotasikan dengan $\mathbb{S}$ dan dilengkapi oleh ~~dengan~~operasi $\oplus$ dan$\otimes$pada $\mathbb{S}$sebagai berikut

$$\overline{(a,b)} \oplus \overline{(c,d)} = \overline{(a \oplus c, b \oplus d)}$$
$$\overline{(a,b)} \otimes \overline{(c,d)} = \overline{(a \otimes c \oplus b \otimes d, a \otimes d \oplus b \otimes c)}$$

Selanjutnya, struktur $(\mathbb{S},\oplus,\otimes)$ disebut aljabar maks plus tersimetri, dan dibedakan tiga kelas ekuivalensi yang dibangun oleh $\mathcal{B}$ sebagai berikut :

1. $\overline{(t,\varepsilon)} = \{(t,x) \in \mathbb{R}_\varepsilon^2 | x < t\}$ disebut positif maks plus, dinotasikan $\mathbb{S}^{\oplus}$.
2. $\overline{(\varepsilon,t)} = \{(x,t) \in \mathbb{R}_\varepsilon^2 | x < t\}$disebut negatif maks plus, dinotasikan $\mathbb{S}^{\ominus}$.
3. $\overline{(t,t)} = \{(t,t) \in \mathbb{R}_\varepsilon^2 | x < t\}$ disebut setimbang (*balance*), dinotasikan $\mathbb{S}^{\bullet}$.

Dari kelas ekuivalensi di atas maka diperoleh :

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}^{\oplus} \cup \mathbb{S}^{\ominus} \cup \mathbb{S}^{\bullet}$$

Keanggotaan dalam himpunan$\mathbb{S}$yang semula dinyatakandalam pasangan bilangan, selanjutnya dinyatakan sebagai keanggotaan dalam himpunan$\mathbb{R}_\varepsilon$, sehingga untuk $a \in \mathbb{R}_\varepsilon$:

$$a = \overline{(a,\varepsilon)}\text{dengan}\overline{(a,\varepsilon)} \in \mathbb{S}^{\oplus}$$
$$\ominus a = \ominus \overline{(a,\varepsilon)} = \overline{\ominus (a,\varepsilon)} = \overline{(\varepsilon,a)}\text{dengan}\overline{(\varepsilon,a)} \in \mathbb{S}^{\ominus}$$
$$a^{\bullet} = a \ominus a = \overline{(a,a)} \in \mathbb{S}^{\bullet}$$

3. Matriks atas Aljabar Maks Plus Tersimetri

Karena elemen dari aljabar maks plus tersimetri mempunyai invers, maka dapatdikembangkan operasi-operasi baris elementer pada suatu matriks atas aljabarmaks plus tersimetri.

Definisi 3.1 Tiga tipe operasi baris elementer pada *A* matriks atas aljabar maksplus tersimetri, yaitu :

1. Mempertukarkan baris ke-*i* dan baris ke-*j*
2. Mengalikan baris ke-*i* dengan konstanta *k* yang tidak setimbang dengan ε
3. Menambahkan *k* kali baris ke-*i* dengankepada baris ke-*j* untuk $i \neq j$

□???

Matriks identitas *nxn* atas aljabar maks plus tersimetri adalah E_n dengan

$$[E_n]_{ij} = \begin{cases}0, jika\ i = j \\ \varepsilon, jika\ i \neq j\end{cases}.$$

Definisi 3.2 Suatu matriks elementer adalah matriks *nx n*yang diperoleh darimatriks identitas E_n dengan melakukan suatu operasi baris elementer tunggal. □??

Commented [Office22]: Hub syarat berelasinya kedua elemen belum jelas.

Commented [Office23]: persamaan yang mana?

Commented [Office24]: Bagaimana maksud kalimat ini?

Commented [Office25]: mohon diperhatikan lagi redaksinya, diperjelas lagi konsekuensi relasi ekuivalensi thd himpunan tsb.

Formatted: Font color: Red

Formatted: Font color: Red

Formatted: Font color: Red

Formatted: Font color: Red

Formatted: Font color: Red

Formatted: Font color: Red

Formatted: Highlight

Commented [Office26]: perlu dijelaskan dan diilustrasikan ketiga jenis kelas ini, apa maksud t dan epsilon khususnya t. Bagaimana membuktikan mereka bertiga memenbtuk kelas2 ekuivalensi pada S.

Commented [Office27]: apa yg dimaksud konstanta tidak seimbang di sini

Formatted: Font color: Red

Commented [Office28]: bisa menggunakan equation editor

Formatted: Font color: Red

Formatted: Font color: Red

Formatted: Font color: Red

 ISSN: 2548-4809

Menurut Definisi 3.2, jika E matriks elementer atas aljabar maks plus tersimetridan $A \in M_{m\times n}(\mathbb{S})$maka $E \otimes A$ adalah matriks yang diperoleh dari operasi bariselementer pada matriks A.

Elemen atas aljabar maks plus tersimetri mempunyai invers terhadap $\oplus$ danoperasi baris elementer juga berlaku pada matriks atas aljabar maks plus tersimetri, oleh karena itu dapat dikembangkan bentuk eselon baris yang diberikan dalam definisi berikut.

Definisi 3.3 Suatu matriks atas aljabar maks plus tersimetri dikatakan mempunyaibentuk eselon baris jika memenuhi kondisi berikut:

1. Jika ada suatu baris yang tidak seluruh entri-nya setimbang dengan ε, makaentri pertama yang tak setimbang dengan ε pada baris tersebut adalah unsur 0.Selanjutnya, disebut 0 utama.
2. Jika ada baris-baris yang seluruh entri-nya setimbang dengan ε, maka baris-barisini berada di bagian bawah matriks.
3. Pada dua baris berurutan yang seluruh entri-nya tidak setimbang dengan ε, 0utama di dalam baris yang lebih bawah terletak di sebelah kanan 0 utama didalam baris yang lebih atas.

Contoh: Diberikan

$$A = \begin{pmatrix} \ominus 2 & 1^{\bullet} & \epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 & \epsilon & \ominus 0 \\ 1 & 0^{\bullet} & 1 & \epsilon \end{pmatrix}.$$

Commented [Office29]: Harap menggunakan equation editor jangan berupa screeshot

Akan ditentukan bentuk eselon baris dari matriks A tersebut. Berikut ini merupakanserangkaian operasi baris elementer pada matriks A.

$$\begin{pmatrix} \ominus 2 & 1^{\bullet} & \epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 & \epsilon & \ominus 0 \\ 1 & 0^{\bullet} & 1 & \epsilon \end{pmatrix} \overset{H_{1(\ominus(-2))}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\bullet} & \epsilon & \ominus(-2) \\ \epsilon & 1 & \epsilon & \ominus 0 \\ 1 & 0^{\bullet} & 1 & \epsilon \end{pmatrix} \overset{H_{31(\ominus 1)}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\bullet} & \epsilon & \ominus(-2) \\ \epsilon & 1 & \epsilon & \ominus 0 \\ 1^{\bullet} & 0^{\bullet} & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{H_{2(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\bullet} & \epsilon & \ominus(-2) \\ \epsilon & 0 & \epsilon & \ominus(-1) \\ 1^{\bullet} & 0^{\bullet} & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{H_{32(0)}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\bullet} & \epsilon & \ominus(-2) \\ \epsilon & 0 & \epsilon & \ominus(-1) \\ 1^{\bullet} & 0^{\bullet} & 1 & (-1)^{\bullet} \end{pmatrix} \overset{H_{3(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\bullet} & \epsilon & \ominus(-2) \\ \epsilon & 0 & \epsilon & \ominus(-1) \\ 0^{\bullet} & (-1)^{\bullet} & 0 & (-2)^{\bullet} \end{pmatrix}.$$

Commented [Office30]: ini juga sama

Diperoleh

$$E_A = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\bullet} & \epsilon & \ominus(-2) \\ \epsilon & 0 & \epsilon & \ominus(-1) \\ 0^{\bullet} & (-1)^{\bullet} & 0 & (-2)^{\bullet} \end{pmatrix}$$

merupakan bentuk eselon baris dari matriks A.

Karena matriks elementer mempunyai invers yang juga suatu matriks elementermaka diperoleh teorema berikut.

Commented [Office31]: Dari mana fakta ini, mengingat contoh tdk dapat diperumum.

Teorema 3.4. Jika A matriks invertibel maka terdapat serangkaian matriks elementer$E_1, E_2, \ldots, E_k$dengan$A \nabla E_1 \otimes E_2 \otimes \ldots \otimes E_k$.

Commented [Office32]: Dicek lagi hasil pada teorema ini krn invers matriks tersusun atas perkalian matriks2 elementer???

4. Determinan Matriks atas Aljabar Maks Plus Tersimetri

Karena elemen dari aljabar maks plus tersimetri mempunyai invers, maka dapatdidefinisikan determinan suatu matriks atas aljabar maks plus tersimetri.

Definisi 4.1. (De Schutter [1996]) Diberikan matriks$A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$.
Determinan A didefinisikan sebagai

$$\det(A) = \bigoplus_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \right)$$

dengan S_n himpunan semua permutasi dari $\{1, 2, \ldots, n\}$, dan

$$sgn(\sigma) = \begin{cases} 0, jika\ \sigma\ permutasi\ genap \\ \ominus 0, jika\ \sigma\ permutasi\ ganjil \end{cases}$$??

Formatted: Font color: Red

Perlu diberikan contoh bgmn formula ini bekerja, apakah bedanya dengan determinan biasa?

Formatted: Font color: Red

Untuk suatu matriks atas aljabar maks plus tersimetri, duabaris yang dipertukarkan mempunyai sifat berikut.

Rujukan lemmanya tidak ada.

Formatted: Font color: Red

Formatted: Font color: Red

Lemma 4.2. Diberikan $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$dengan $\mathbb{S}$ aljabar maks plus tersimetri.Jika $B = (b_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$ diperoleh dari A dengan mempertukarkan dua baris, makadet$(B) = \ominus \det(A)$.

Selain itu, juga diperoleh sifat-sifat lain determinan matriks atas aljabar maks plus tersimetri berdasarkan operasi baris elementer, seperti dalam beberapa lemma berikut.

Lemma 4.3. Diberikan $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$ dengan S aljabar maks plus tersimetri.Jika $B = (b_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$ diperoleh dari *A* dengan mengalikan suatu baris dengan konstanta*k* yang tidak setimbang dengan *ε* maka det(B) = *k*⊗ det(A).

Lemma 4.4. Jika A matriks persegi atas aljabar maks plus tersimetri mempunyaidua baris yang sama maka det(A)∇ *ε*.

Lemma 4.5. Diberikan $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$dengan S aljabar maks plus tersimetri.Jika $B = (b_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$diperoleh dengan menambahkan *k* kali baris ke-*m* dengan bariske-*l* dari matriks *A* untuk *l*≠*m* maka det(B) = det(A).

Untuk suatu matriks yang diperoleh dari matriks lain melalui operasi baris elementer tunggal, diperoleh sifat sebagai berikut.

mengapa lemma ini dibuktikan sedangkan lemma lainnya tidak??

Formatted: Font color: Red

Lemma 4.6. Jika A matriks atas aljabar maks plus tersimetri dan E matriks elementermaka $\det(E \otimes A) = \det(E) \otimes \det(A)$.

Bukti :

Akan ditinjau untuk ketiga tipe dalam operasi baris elementer.Misalkan E matriks elementer yang diperoleh dengan mempertukarkan baris ke-*i*dengan baris ke-*j* pada matriksapakah E atau E_n, maka menurut Lemma 4.2 diperoleh $\det(E) = \ominus \det(E_n) = \ominus\, 0$. Akibatnya, karena $det(E \otimes A) = \ominus\, det(A)$ maka $det(E \otimes A) = \ominus\, det(A) = \ominus\, 0 \otimes \det(A) = \det(E) \otimes \det(A)$. Misalkan E matriks elementer yang diperoleh dengan mengalikan baris ke-i dengan k yang bukan ε pada matriks E_n maka menurut Lemma 4.3 diperoleh $\det(E) = k \otimes \det(E_n) = k \otimes 0 = k$. Akibatnya, karena $\det(E \otimes A) = k \otimes \det(A)$ maka $\det(E \otimes A) = \det(E) \otimes \det(A)$. Misalkan E matriks elementer yang diperoleh dengan menambahkan $k$kali baris ke-m dengan baris ke-m dengan baris ke-l dari matriks E_n untuk $l \neq m$, maka menurut Lemma 4.5 diperoleh $\det(E) = det(E_n) = 0$.Akibatnya,

$$\det(E \otimes A) = \det(A) = 0 \otimes \det(A) = \det(E) \otimes \det(A). \quad ■$$

Selanjutnya, untuk determinan dari hasilkali dua matriks atas aljabar maks plus tersimetri berlaku sifat sebagai berikut.

Teorema 4.7. Untuk $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$, berlaku$\det(A \otimes B)\,\nabla \det(A) \otimes \det(B)$.

Bukti :

Misalkan Atidak invertibel, berakibat $\det(A)\,\nabla \varepsilon$. Akibatnya, $\det(A \otimes B)\,\nabla \varepsilon$.

Misalkan Ainvertibel. Menurut Teorema 3.4terdapat serangkaian matriks elementer$E_1, E_2, \dots, E_k$dengan$A \nabla E_1 \otimes E_2 \otimes \dots \otimes E_k$. Selanjutnya

$$\begin{aligned} det(A \otimes B) &\nabla det(E_1 \otimes E_2 \otimes \dots \otimes E_k \otimes B) \\ &\nabla det(E_1) \otimes det(E_2) \otimes \dots \otimes det(E_k) \otimes det(B) \\ &\nabla det(E_1 \otimes E_2 \otimes \dots \otimes E_k) \otimes det(B) \end{aligned}$$

Diperoleh, $\det(A \otimes B)\,\nabla \det(A) \otimes \det(B)$. ■

Hubungan antara determinan dan adjoin matriks atas aljabar maks plus tersimetridiberikan dalam lemma berikut.

Lemma 4.8. Diberikan aljabar maks plus tersimetri $\mathbb{S}$ dengan elemen nolε dan elemen identitas 0. Untuk $A \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$ diperoleh

$$\det(A) \otimes E_n \nabla A \otimes \mathrm{adj}(A) \nabla \mathrm{adj}(A) \otimes A.$$

$[\det(A) \otimes E_n]\nabla[A \otimes \mathrm{adj}(A)]\nabla[\mathrm{adj}(A) \otimes A]$.penulisan seperti ini mungkin~~barangkali~~ lebih baik.

Bukti :

Diperhatikan

$$\det(A) \otimes E_n = \begin{cases} \varepsilon, jika\ i \neq j \\ \det(A), jika\ i = j \end{cases}$$

Diperhatikan $A \otimes adj(A) = (A \otimes adj(A))_{ij}$ dengan

$$\begin{aligned} (A \otimes adj(A))_{ij} &= \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes (adj(A))_{kj} \\ &= \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes (\ominus\, 0)^{\otimes^{k+j}} \otimes |A(j,k)| \\ &= \bigoplus_{k=1}^{n} (\ominus\, 0)^{\otimes^{k+j}} a_{ik} \otimes |A(j,k)| \end{aligned}$$

Untuk $i = j$ dipunyai

$$(A \otimes adj(A))_{n} \bigoplus_{k=1}^{n} (\ominus\, 0)^{\otimes^{k+j}} a_{ik} \otimes |A(j,k)| = \det(A)$$

Commented [Office33]: Gunakan equation editor

Formatted: Font color: Red

Untuk $i \neq j$. Misalkan $B \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$adalah matriks sedemikian sehinggabaris ke-j dari B sama dengan baris ke-i dari A dan baris-baris yang lain dari B sama dengan baris-baris pada A.Dari sini $b_{jk} = a_{ik}$ untuk $1 \leq k \leq n$. Akibatnya, diperoleh

$$\varepsilon \nabla \det(B) = \bigoplus_{k=1}^{n} (\ominus 0)^{\otimes j+k} \otimes b_{jk} \otimes |B(j,k)|$$

$$\varepsilon \nabla \det(B) = \bigoplus_{k=1}^{n} (\ominus 0)^{\otimes j+k} \otimes a_{jk} \otimes |A(j,k)|$$

$$\varepsilon \nabla \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes (adj(A))_{kj}, i \neq j$$

$$\varepsilon \nabla \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes (adj(A))_{kj}$$

$$\varepsilon \nabla \bigoplus_{k=1}^{n} (A \otimes adj(A))_{ij}$$

Sehingga diperoleh
$(A \otimes adj(A))_{ij} \nabla \varepsilon$jika $i \neq j$dan $(A \otimes adj(A))_{ij} = \det(A)$ jika$i \neq j$.
Analog dengan cara tersebut, diperoleh
$(adj(A) \otimes A)_{ij} \nabla \varepsilon$jika $i \neq j$dan $(adj(A) \otimes A)_{ij} = \det(A)$ jika$i \neq j$.
Akibatnya,

$$\det(A) \otimes E_n \nabla A \otimes \mathrm{adj}(A) \nabla \mathrm{adj}(A) \otimes A. \qquad \blacksquare$$

Commented [Office34]: Penulisan persamaan tidak jelas, cara pengambilan kesimpulan jg tidak jelas.

Formatted: Font: Cambria Math

Daftar Pustaka

Commented [Office35]: Beberapa refernsi tidak ada dalam pembahasan. Teknik merujuk kurang jelas.

Formatted: Left, Indent: Left: 0 cm, First line: 0 cm

[1] Anton, Howard. 1991. *Elementary Linear Algebra*. New York : John Wiley & Sons

[2] Baccelli, F., et al. 2001. *Synchronization and Linearity*. New York : John Wiley & Sons.

[3] De Schutter, B. , 1996. *Max-Algebraic System Theory for Discret Event Systems*, PhD thesis Departement of Electrical Enginering Katholieke Universiteit Leuven, Leuven.

[4] De Schutter, B. and De Moor, B.,2002. "*The QR decomposition and the singularvalue decomposition in the symmetrized max-plus algebra revisited*," *SIAMReview*, vol. 44, no. 3, pp. 417–454.

[5] Poplin, PhilipL.2000. *The Semiring of Multisets.* A thesis submitted to the Graduate Faculty of North Caroline State University

[6] Singh, D., Ibrahim, M., and Singh, J.N., 2008. A Note on Symmetrized Max-Plus Algebra. Journal of Mathematical Sciences and Mathematics Education. Vol. 5. No.1.

~~[6]~~ Perlu dijelaskan apakah Teorema 4.8 berasal dari salah satu referensi ini, kalau berbeda jelaskan perbedaannya.

Formatted: No bullets or numbering

Formatted: Font color: Red