Kebergantungan Nilai Indeks Bias Medium pada Panjang Gelombang Model Sellmeier

Herwinarso

Abstrak. *Persamaan yang menyatakan kebergantungan indeks bias suatu medium terhadap panjang gelombang (dispersi), mula-mula dinyatakan oleh Augustin Louis Cauchy pada tahun 1836, yang kemudian dikenal dengan model dispersi indeks bias Cauchy. Model dispersi indeks bias Cauchy ini didasarkan pada data hasil eksperimen (secara empiris), dan persamaan dispersi indeks bias Cauchy pada dasarnya merupakan persamaan polinom.*

Salah satu kajian tentang dispersi indeks bias secara teoritis dikemukakan oleh Wilhelm Sellmeier tahun 1871, yang kemudian dikenal dengan Persamaan Sellmeier. Persamaan Sellmeier merupakan persamaan yang menyatakan keterkaitan indeks bias bahan dielektrik transparan dengan panjang gelombang optis yang melalui bahan dielektrik tersebut. Selmeier menggunakan beberapa pendekatan-pendekatan tentang elektron-elektron dalam medium, yang pertama adalah anggapan bahwa elektron-elektron medium terikat pada intinya masing-masing oleh suatu yang berkelakuan sebagai gaya pemulih. Kedua, anggapan bahwa elektron yang mengalami percepatan (karena pengaruh gaya luar) juga mengalami redaman radiasi (damping radiation) dengan gaya yang sebanding dengan besar kecepatan electron. Dan elektron dengan spesifikasi yang dinyatakan dalam model pendekatan tersebut, dalam interaksinya dengan gelombang EM yang datang padanya mengalami gaya yang dapat dinyatakan dengan persamaan : $F = e\,E_o \exp(-i\,\omega\,t)$

Melalui pendekatan interaksi elektron dengan medium telah diperoleh persamaan dispersi indeks bias suatu medium yang kemudian dikenal dengan Persamaan Sellmeier. Pada Persamaan Sellmeier dapat ditunjukkan bahwa dengan menggunakan pendekatan polynomial akan diperoleh persamaan dispersi indeks bias Cauchy.

Kata kunci*: Dispersi indeks bias, Sellmeier, bahan dielektrik medium transparan, gelombang elektromagnetik*

Pendahuluan

Mula-mula kita mengenal indeks bias pada peristiwa pembiasan dengan menggunakan eksperimen balok kaca pada proses pembelajaran di sekolah menengah, yang memberikan pemahaman bahwa indeks bias suatu medium berbeda-beda sesuai dengan jenis mediumnya. Selanjutnya kita mulai mengenal peristiwa terurainya warna sinar polikromatis di dalam prisma melalui eksperimen spectrometer prisma, hal ini memberikan pemahaman bahwa indeks bias suatu medium bergantung pada panjang gelombang.

Indeks bias merupakan bagian penting pada perancangan suatu pandu gelombang optik. Nilai indeks bias suatu medium bergantung pada nilai panjang gelombang cahaya yang berinteraksi pada medium tersebut. Kebergantungan nilai indeks bias medium terhadap panjang gelombang (dikenal dengan istilah dispersi indeks bias) secara empiris ditulis sebagai model dispersi indeks bias Cauchy.

Salah satu kajian tentang dispersi indeks bias secara teoritis dikemukakan oleh Sellmeier. Persamaan Sellmeier merupakan persamaan yang menyatakan keterkaitan indeks bias bahan dielektrik dengan panjang gelombang optis yang melalui bahan dielektrik tersebut. Selmeier menggunakan beberapa pendekatan-pendekatan tentang elektron-elektron dalam medium, yang pertama adalah anggapan bahwa elektron-elektron medium terikat pada intinya masing-masing oleh suatu yang berkelakuan sebagai gaya pemulih. Kedua, anggapan bahwa elektron yang mengalami percepatan (karena pengaruh gaya luar) juga mengalami redaman radiasi (damping radiation) dengan gaya yang sebanding dengan besar kecepatan electron. Dan elektron dengan spesifikasi yang dinyatakan dalam model pendekatan tersebut, dalam interaksinya dengan gelombang EM yang datang padanya mengalami gaya yang dapat dinyatakan dengan persamaan : $F_3 = e E_o \, exp(-i \omega t)$. Secara detail akan ditunjukkan langkah langkah diperolehnya Model Dispersi Indeks Bias Sellmeier pada makalah ini.

Gelombang EM dan Model Interaksinya dengan Medium

Gelombang EM adalah getaran medan listrik dan medan magnet yang merambat dalam ruang. Gelombang EM meliputi suatu spektrum yang sangat lebar, satu dengan lainnya dibedakan oleh frekuensinya. Penyelesaian persamaan-persamaan elektrodinamika Maxwell menunjukkan adanya hubungan antara besar kuat medan listrik dan kuat medan magnet dalam suatu gelombang EM. Dengan demikian tinjauan terhadap gelombang EM dapat dilakukan dengan memperhitung-kan medan listriknya.

Dalam ruang hampa semua gelombang EM merambat dengan laju c dan memenuhi persamaan gelombang (dalam penyelesaian satu dimensi) :

$$\frac{d^2E}{dx^2} = \mu_o \varepsilon_o \frac{d^2E}{dt^2} \qquad (1)$$

Fungsi gelombang yang memenuhi persamaan (1) secara umum dapat dituliskan :

$$E(x,t) = E_o \, exp\{i(kx - \omega t)\} \qquad (2)$$

k dan ω dalam Persamaan (2) berturut-turut menyatakan bilangan gelombang dan frekuensi sudut. Kedua besaran ini saling terkait dalam hubungannya dengan cepat rambat gelombang dan Persamaan (1), yaitu :

$$\frac{\omega}{k} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}} \tag{3}$$

Jika gelombang EM tersebut merambat di dalam suatu medium, cepat rambatnya berubah menjadi v, sedangkan persamaan gelombang yang harus dipenuhi berubah menjadi :

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = \mu_o \varepsilon \frac{d^2 E}{dt^2} \tag{4}$$

Fungsi gelombang yang memenuhi persamaan (4) dapat dituliskan :

$$E(x,t) = E_o \, exp\{i(\beta x - \omega t)\} \tag{5}$$

β dan ω dalam Persamaan (5) dikaitkan dengan Persamaan (4) melalui hubungan :

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon}} \tag{6}$$

ε dalam persamaan (4) dan (6) disebut permitivitas medium, suatu besaran karakteristik medium yang berkaitan dengan respon medium terhadap medan listrik. Apabila gelombang EM tersebut dalam perambatannya mengalami pelemahan dalam medium dengan koefisien pelemahan α, maka Persamaan (5) dapat dituliskan :

$$E(x,t) = E_o \, exp(-\alpha x) exp\{i(\beta x - \omega t)\}$$
$$E(x,t) = E_o \, exp\{i[(\beta + \alpha i) x - \omega t]\} \tag{7}$$

Berdasarkan persamaan (7) maka kecepatan fase gelombang EM dalam medium adalah $v_p = \frac{\omega}{(\beta + a i)}$, sehingga diperoleh:

$$\lambda_m f = \frac{\omega}{(\beta + a i)}$$

$$\lambda_m \frac{c}{\lambda_0} = \frac{\omega}{(\beta + a i)}$$

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_m} = \frac{c}{\omega}(\beta + a\,i)$$

$$n^* = \frac{c}{\omega}(\beta + a\,i) \qquad (8)$$

n* adalah indeks bias medium yang merupakan besaran kompleks dengan bagian riilnya $n = \frac{c}{\omega}\beta$ dan bagian imajinernya $n' = \frac{c}{\omega}a$.

Mengingat gelombang EM merambatkan medan listrik dan medan magnet dalam medium, maka bagian medium yang berinteraksi dengan gelombang EM tentulah partikel-partikel bermuatan listrik dalam medium, yaitu elektron dan proton. Namun karena alasan massa elektron jauh lebih kecil daripada massa proton yang terikat dalam inti atom, maka interaksi medium dan gelombang EM sangat didominasi oleh elektron-elektron medium. Dengan demikian dalam model pendekatan ini interaksi antara medium dan gelombang EM dapat diwakili oleh elektron-elektron medium.

Beberapa pendekatan-pendekatan tentang elektron-elektron dalam medium, yang pertama adalah anggapan bahwa elektron-elektron medium terikat pada intinya masing-masing oleh suatu yang berkelakuan sebagai gaya pemulih :

$$F_1 = -K\,x \qquad (9)$$

Anggapan ini berpijak pada teori atom yang menyatakan bahwa elektron-elektron dalam atom menempati orbit-orbit tertentu dengan tingkat energi yang tertentu pula. Dari tinjauan dinamika, elektron yang demikian ini berada dalam kesetimbangan dinamik dengan suatu gaya tertentu yang dalam hal ini diandaikan dalam bentuk Persamaan (9). Perlu ditekankan disini bahwa variable x dalam Persamaan (9) bukan menyatakan jarak elektron ke inti, melainkan perubahan posisi elektron dari kedudukan setimbang (orbit mantap) nya.

Pendekatan berikutnya adalah anggapan bahwa elektron yang mengalami percepatan (karena pengaruh gaya luar) juga mengalami redaman radiasi (damping radiation) dengan gaya yang sebanding dengan besar kecepatan elektron jika percepatan elektron tersebut sinusoida (Abraham, 1903, dan Lorentz, 1904). Gaya yang berkaitan dengan redaman radiasi ini bersifat sebagai gaya gesekan, secara umum dapat dirumuskan:

$$F_2 = -m\gamma\frac{dx}{dt} \qquad (10)$$

Elektron dengan spesifikasi yang dinyatakan dalam model pendekatan tersebut, dalam interaksinya dengan gelombang EM yang datang padanya mengalami gaya yang dapat dinyatakan dengan persamaan :

$$F_3 = e E_o \, exp(-i \omega t) \tag{11}$$

Dengan demikian gerak atau dinamika elektron dalam interaksinya dengan gelombang EM dapat digambarkan sebagai gerak sebuah benda di ujung pegas yang dipaksa oleh suatu gaya luar dan disertai dengan suatu gaya redaman yang besarnya sebanding dengan besar kecepatan sesaatnya.

Dengan demikian persamaan gerak sebuah elektron yang bermassa m dan bermuatan q dalam pengaruh gelombang EM yang datang padanya dapat dinyatakan dengan persamaan :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_1 + F_2 + F_3$$

atau

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m \gamma \frac{dx}{dt} + K x = e E_o \, exp(-i \omega t) \tag{12}$$

Dengan mengabaikan suku transient pada fungsi penyelesaian Persamaan (12) maka simpangan sesaat elektron dalam notasi kompleks dapat dituliskan sebagai :

$$x(t) = \frac{e/m}{(\omega_o^2 - \omega^2) - i \gamma \omega} E_o \, exp(-i \omega t) \tag{13}$$

ω_o dalam Persamaan (13) disebut frekuensi (sudut) alami elektron, suatu besaran karakteristik elektron yang berkaitan dengan gaya pemulih elektron : $\omega_o^2 = \frac{K}{m}$

Perumusan Indeks Bias Sellmeier

Simpangan sesaat elektron yang dirumuskan dalam Persamaan (13) menghasilkan momen dipole sesaat p(t) sebesar :

$$p(t) = e\, x(t) = \frac{e^2/m}{(\omega_o^2 - \omega^2) - i \gamma \omega} E_o \, exp(-i \omega t) \tag{14}$$

Momen dipole p(t) yang dialami oleh masing-masing atom akibat medan listrik luar E(t) didefinisikan $p(t) \equiv \alpha \, E(t)$ dan berdasarkan Persamaan (14) diperoleh:

$$\alpha = \frac{e^2 / m}{(\omega_o^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}$$

(15)

Medan listrik total yang dialami oleh atom/molekul pada bahan dielektrik yang dikenai medan listrik luar : $\vec{E}_{total} = \vec{E} + \vec{E}_{\text{int}}$, dimana $\overline{\vec{E}}_{\text{int}} = \frac{\int \vec{E}_{\text{int}}\, d^3r}{V}$. Apabila N adalah jumlah atom tiap satuan volume maka medan internal totalnya $N\int \vec{E}_{\text{int}}\, d^3r$, sehingga

$$\vec{E}_{total} = \vec{E} + N\int \vec{E}_{\text{int}}\, d^3r$$

$$= \vec{E} - \frac{N\vec{p}}{3\varepsilon_o}$$

$$= \vec{E} - \frac{N\alpha\vec{E}}{3\varepsilon_o}$$

$$\vec{E} = \left(\frac{1}{1 - \frac{N\alpha}{3\varepsilon_o}} \right) E_{total}$$

(16)

Hubungan antara permitivitas ε dan polarisasi medium $\vec{P}$ diberikan oleh persamaan,

$$\varepsilon\,\vec{E}_{total} = \varepsilon_o\,\vec{E}_{total} + \vec{P} \quad \text{, dimana } \vec{P} = N\alpha\vec{E}.$$

$$\varepsilon\,\vec{E}_{total} = \varepsilon_o\,\vec{E}_{total} + N\alpha\vec{E}$$

$$\varepsilon\,\vec{E}_{total} = \varepsilon_o\,\vec{E}_{total} + N\alpha \left(\frac{1}{1 - \frac{N\alpha}{3\varepsilon_o}} \right) \vec{E}_{total}$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = 1 + \frac{N/\varepsilon_o}{(1/\alpha) - (N/3\varepsilon_o)}$$

(17)

dimana $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = \varepsilon_r$, dan dari Persamaan (15) dan (17) diperoleh :

$$\varepsilon_r - 1 = \frac{N e^2 / m\varepsilon_o}{\omega_o^2 - \omega^2 - i\gamma\,\omega - N e^2 / 3m\varepsilon_o}$$
(18)

Secara umum keadaan elektron yang berbeda dalam sebuah atom atau molekul menyebabkan perbedaan pula dalam ω_o dan γ elektron tersebut. Andaikan pada setiap atom (molekul) medium terdapat g_k elektron dengan frekuensi alami ω_k dan koefisien redaman γ_k, dan $\omega = 2\pi f$ maka permitivitas relatif medium dapat dirumuskan sebagai :

$$\varepsilon_r - 1 = K \sum_k \frac{g_k}{f_k^2 - f^2 - i\gamma_k f / 2\pi}$$
(19)

dimana: $f_k = \frac{1}{4\pi^2}\left(\omega_o^2 - \frac{N e^2}{3m\varepsilon_o}\right)$ dan $K = \frac{N e^2}{4\pi^2 m\varepsilon_0}$

Dari Persamaan (19), permitivitas relatif merupakan besaran kompleks yang terdiri atas besaran riil dan imajiner. Mengingat bahwa indeks bias pada besaran riil adalah $n = \sqrt{\varepsilon_r}$, maka diperoleh :

$$n^2 - 1 = \sum_k \frac{K g_k}{f_k^2 - f^2} = \sum_k \frac{G_k \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2}$$
(20)

dimana :

$$G_k = \frac{K g_k \lambda_k^2}{c^2} \qquad \text{dan} \qquad \lambda_k = \frac{c}{f_k}$$

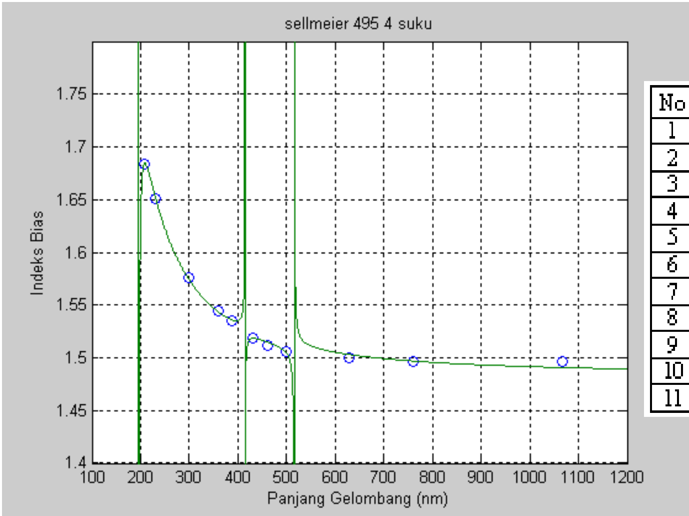
Persamaan (20) kemudian dikenal dengan ***persamaan Sellmeier***.

Pada salah satu uji model persamaan Sellmeier pada data PMMA-495 sampai empat suku dengan menggunakan *curve fitting* program MATLAB diperoleh:

$$n(\lambda) = 1 + \frac{1{,}2290\,\lambda^2}{\lambda^2 - 1{,}7261x10^4} - \frac{2{,}5475x10^{-2}\,\lambda^2}{\lambda^2 - 3{,}7981x10^4} - \frac{1{,}0590x10^{-4}\,\lambda^2}{\lambda^2 - 1{,}7167x10^5} + \frac{1{,}5262x10^{-3}\,\lambda^2}{\lambda^2 - 2{,}6622x10^5}$$

dengan λ dalam nanometer (nm)

Jumlah kuadrat sisa = $5{,}5213\text{x}10^{-5}$
Koefisien korelasi = 0,9964
Koefisien determinasi = 0,9928



No	λ(nm)	n data	n model
1	207,09	1,6835	1,6835
2	231,61	1,6505	1,6507
3	298,70	1,5765	1,5747
4	360,64	1,5440	1,5437
5	397,79	1,5350	1,5362
6	430,32	1,5190	1,5183
7	461,29	1,5120	1,5149
8	498,7	1,5055	1,5052
9	629,03	1,4995	1,5032
10	760,64	1,4965	1,4969
11	1066,45	1,4960	1,4907

Grafik dispersi indeks bias Sellmeier empat suku untuk PMMA-495

Pada Grafik terlihat bahwa panjang gelombang resonansinya adalah $\sqrt{3{,}7981x10^4}$ = 194,89 nm, $\sqrt{1{,}7167x10^5}$ = 414,33 nm dan $\sqrt{2{,}6622x10^5}$ = 515,97 nm, sedangkan panjang gelombang resonansi $\sqrt{1{,}7261x10^4}$ = 131,38 nm tidak tampak pada gambar.

- Untuk $\lambda > \lambda_k$, k = k', dan $\lambda >> \lambda_{k'}$

$$\frac{G_{k'}\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_k^2} \approx G_{k'}\left(1+\frac{\lambda_k^2}{\lambda^2}+\frac{\lambda_k^4}{\lambda^4}+\ldots\right) \tag{22}$$

- Untuk $\lambda < \lambda_k$, k = k'', dan $\lambda \propto \lambda_{k'}$

$$\frac{G_{k''}\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_k^2} \approx -G_{k''}\ldots\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right)\left(1+\frac{\lambda^2}{\lambda_{k''}^2}+\ldots\right) \tag{23}$$

Sehingga Persamaan (20) menjadi :

$$n^2-1=\sum_k\frac{G_k\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_k^2} \approx \ldots+\frac{A}{\lambda^4}+\frac{B}{\lambda^2}+C+D\lambda^2+E\lambda^4+\ldots \tag{24}$$

dimana :

$$A=\sum_k G_{k'}\lambda_{k'}^4 \quad , \quad B=\sum_k G_{k'}\lambda_{k'}^2 \quad , \quad C=\sum_k G_{k'} \quad ,$$

$$D=\sum_k -G_{k''}.../\lambda_{k''}^2 \quad E=\sum_k -G_{k''}.../\lambda_{k''}^4$$

Selanjutnya dengan menggunakan pendekatan polynomial, untuk $\lambda > \lambda_k$, k = k', dan $\lambda >> \lambda_{k'}$ diperoleh:

$$n^2-1=\sum_k \frac{G_{k'}\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_{k'}^2} \approx G_{k'}\left(1+\frac{\lambda_{k'}^2}{\lambda^2}+\frac{\lambda_{k'}^4}{\lambda^4}+...\right) \quad (25)$$

k' menyatakan keadaan elektron untuk $\lambda_k < \lambda$, sehingga diperoleh:

$$n^2-1=\left(A+\frac{B}{\lambda^2}+\frac{C}{\lambda^4}+...\right) \quad (26)$$

dengan $A=\sum_k G_{k'}$, $B=\sum_k -G_{k''}/\lambda_{k''}^2$ dan $C=\sum_k -G_{k''}/\lambda_{k''}^4$

Persamaan (26) merupakan persamaan dispersi indeks bias Cauchy. Dengan demikian secara teoritis Persamaan dispersi indeks bias Cauchy dapat diturunkan dari Persamaan Sellmeier.

Penutup

Salah satu kajian teori tentang kebergantungan nilai indeks bias suatu medium bergantung pada panjang gelombang yang berinteksi dengan medium tersebut telah dikemukakan oleh Selmeier. Dalam pembahasannya Sellmeier menggunakan beberapa pendekatan-pendekatan tentang elektron-elektron dalam medium, yang pertama adalah anggapan bahwa elektron-elektron medium terikat pada intinya masing-masing oleh suatu yang berkelakuan sebagai gaya pemulih. Kedua, anggapan bahwa elektron yang mengalami percepatan (karena pengaruh gaya luar) juga mengalami redaman radiasi (*damping radiation*) dengan gaya yang sebanding dengan besar kecepatan electron. Dan elektron dengan spesifikasi yang dinyatakan dalam model pendekatan tersebut, dalam interaksinya dengan gelombang EM yang datang padanya mengalami gaya yang dapat dinyatakan dengan persamaan : $F = e\,E_o \exp(-i\,\omega\,t)$.

Melalui pendekatan interaksi elektron dengan medium telah diperoleh persamaan dispersi indeks bias suatu medium yang kemudian dikenal dengan Persamaan Sellmeier. Pada Persamaan Sellmeier dapat ditunjukkan bahwa dengan menggunakan pendekatan polynomial akan diperoleh persamaan dispersi indeks bias Cauchy, dengan demikian secara teoritis Persamaan dispersi indeks bias Cauchy dapat diturunkan dari Persamaan Sellmeier.

Pustaka

Griffiths D.J. (1989) *Introduction to Electrodynamics*, Second edition. Prentice Hall Inc. New Jersey.

Hanselman D. dan Littlefield B. (1997) *The Student of MATLAB version 5*. Prentice Hall Inc. New Jersey

Micro-Cem. (2001) *Nano PMMA and Copolymer*. http://www.MICRO-CHEM.com

Rubiyanto A. dan Rohedi A.Y. (2003) *Optika Terpadu*. Jurusan Fisika ITS. Surabaya.

Thomson W.T. (1982) *Theory of Vibration with Applications,* 2nd edition. Prentice Hall Inc. California.

Weisstein EW. *Cauchy's Formula*. http://scienceworld.wolfram.co/physics/Cauchy_Formula.html. http://en.wikipedia.org/wiki/Sellmeier_equation