Vol 3 No 2 Bulan Desember 2018

Jurnal Silogisme

Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya

http://journal.umpo.ac.id/index.php/silogisme

KARAKTERISASI DETERMINAN MATRIKS ATAS ALJABAR MAKS-PLUS TERSIMETRI

Gregoria Ariyanti[1]✉ , Ari Suparwanto[2] , dan Budi Surodjo[3]

Info Artikel

Article History:
Accepted April 2018
Approved November 2018
Published December2018

Keywords:
aljabar maks-plus, aljabar maks-plus tersimetri, determinan, adjoin

How to Cite:
Ariyanti, G., Ari Suparwanto, Budi Surodjo (2018). Karakterisasi Determinan Matriks atas Aljabar Maks-Plus Tersimetri. Artikel : Jurnal Silogisme Universitas Muhammadiyah Ponorogo, Vol 3 No 2 : Halaman 48-

Abstrak

Aljabar maks-plus merupakan suatu struktur aljabar $(\mathbb{R}_{\varepsilon},\oplus,\otimes)$ yang tidak mempunyai elemen negatif, yaitu invers terhadap operasi $\oplus$. Oleh karena itu, dikembangkan suatu struktur yang lebih luas yang disebut aljabar maks-plus tersimetri, dinotasikan dengan $(\mathbb{S},\oplus,\otimes)$ dengan $\mathbb{S}$ dikonstruksi dari kelas ekuivalensi. Dengan adanya struktur ini, maka elemen di dalam aljabar maks-plus tersimetri akan mempunyai elemen negatif. Akibatnya, determinan matriks atas aljabar maks-plus tersimetri dapat didefinisikan. Dalam tulisan ini akan dikembangkan karakterisasi determinan matriks atas aljabar maks-plus tersimetri, khususnya di dalam hubungannya dengan adjoint. Hasil utama yang diperoleh yaitu untuk suatu A matriks atas aljabar maks-plus tersimetri, hasilkali determinan matriks A dan matriks identitas berelasi setimbang dengan hasilkali matriks A dan adjoinnya

© 2018 Universitas Muhammadiyah Ponorogo

✉ **Alamat korespondensi:**
Universitas Widya Mandala Madiun [1], Departemen Matematika UGM [2,3]
E-mail: ariyanti_gregoria@yahoo.com[1]

ISSN 2548-7809 (Online)
ISSN 2527-6182 (Print)

PENDAHULUAN

Aljabar maks-plus adalah suatu struktur aljabar yang terdiri dari himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\varepsilon \coloneqq -\infty$, dilengkapi operasi biner $\oplus$ dan $\oplus$ yang didefinisikan sebagai berikut :

$$a \oplus b \coloneqq \max(a, b)$$
$$a \otimes b := a + b$$

untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$ ([2]).

Semiring adalah suatu struktur aljabar $(S, +, \times)$ sedemikian sehingga $(S, +)$ merupakan suatu semigrup komutatif dengan elemen identitas 0, $(S, \times)$ merupakan suatu semigrup dengan elemen identitas 1, sifat distributif perkalian atas penjumlahan, dan perkalian dengan 0 sebagai elemen penyerap (*absorbent*) di dalam S. Oleh karena itu, aljabar maks-plus merupakan salah satu contoh struktur semiring dengan setiap elemen yang bukan ε tidak mempunyai invers terhadap $\oplus$. Dengan kata lain, jika $a \in \mathbb{R}_\varepsilon$ maka tidak ada $b \in \mathbb{R}_\varepsilon$ sehingga $a \oplus b = b \oplus a = \varepsilon$, kecuali jika $a = \varepsilon$. Artinya, jika $a = \varepsilon$, maka terdapat $b = \varepsilon$, sehingga $a \oplus b = b \oplus a = \varepsilon$. Sedangkan, untuk $a \neq \varepsilon$, misal $a = 3$, maka tidak ada b sehingga $b \oplus 3 = \varepsilon$. Hal tersebut merupakan salah satu alasan aljabar maks-plus dikembangkan menjadi struktur yang lebih luas yang disebut aljabar maks-plus tersimetri (*the symmetrized max-plus algebra*), yang dinotasikan dengan $(\mathbb{S}, \oplus, \otimes)$ ([1],[2], [4], [5]).

Di dalam aljabar maks-plus, suatu matriks memiliki invers jika dan hanya jika matriks tersebut dapat dinyatakan sebagai hasilkali dari matriks diagonal dan matriks permutasi ([2]). Dengan kata lain, invers suatu matriks atas aljabar maks-plus sangat sederhana, yaitu hanya untuk matriks yang memuat satu unsur bukan ε dalam setiap baris dan kolomnya. Karena dalam aljabar maks-plus tersimetri dapat didefinisikan elemen negatif, maka invers suatu matriks dapat dikarakteristikkan dengan determinan. Hal ini berbeda dengan elemen di dalam aljabar maks-plus yang tidak memiliki elemen negatif. Berdasarkan karakteristik tersebut, penulis tertarik untuk menyelidiki hal-hal yang terkait determinan suatu matriks atas aljabar maks-plus tersimetri. Matriks atas aljabar maks-plus tersimetri, memiliki entri-entri anggota aljabar maks-plus tersimetri, sehingga dapat ditentukan matriks yang merupakan elemen negatif dari matriks yang diberikan.

Aljabar Maks-Plus Tersimetri

Berikut ini dibahas pembentukan aljabar maks-plus tersimetri yang diawali dengan pembentukan himpunan pasangan berurutan atas aljabar maks-plus.

Definisi 2.1 [3] Diberikan himpunan pasangan berurutan $\mathbb{R}_\varepsilon^2 = \mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}_\varepsilon$ dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ yang didefinisikan sebagai berikut :

$$(x, y) \oplus (w, z) = (x \oplus w, y \oplus z)$$
$$(x, y) \otimes (w, z) = (x \otimes w \oplus y \otimes z, x \otimes z \oplus y \otimes w) \qquad \square$$

untuk $(x, y), (w, z) \in \mathbb{R}_\varepsilon^2$, dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada ruas kanan bersesuaian dengan maksimum dan penjumlahan yang didefinisikan dalam aljabar maks-plus. Elemen $(\varepsilon, \varepsilon)$ adalah identitas penjumlahan $\oplus$ dan elemen (e, ε), dengan $e \coloneqq 0$, adalah identitas perkalian $\otimes$.

Lemma 2.2 [3] Operasi $\oplus$ di dalam $\mathbb{R}_\varepsilon^2$ bersifat asosiatif, komutatif dan idempoten, dan elemen nolnya adalah $(\varepsilon, \varepsilon)$. Operasi $\otimes$ bersifat asosiatif, komutatif dan distributif terhadap $\oplus$, elemen identitas dari $\otimes$ adalah (e, ε) dan elemen nolnya adalah $(\varepsilon, \varepsilon)$ yang juga merupakan elemen penyerap untuk $\otimes$, yaitu $(\varepsilon, \varepsilon) \times (x, y) = (x, y) \times (\varepsilon, \varepsilon) = (\varepsilon, \varepsilon)$ untuk $(x,y) \in \mathbb{R}_\varepsilon^2$. Struktur $(\mathbb{R}_\varepsilon^2, \oplus, \otimes)$ disebut aljabar pasangan (*the algebra of pairs*). $\square$

Definisi 2.3. [3] Untuk $u = (x,y) \in \mathbb{R}_\varepsilon^2$, operator $\ominus$ pada aljabar maks-plus tersimetri (yang merupakan operator elemen negatif) dan operator kesetimbangan (*balance operator*) $(.)^\bullet$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\ominus u = (y, x) \text{ dan } u^\bullet = u \oplus (\ominus u). \qquad \square$$

Lemma 2.4 [3] Untuk $u, v \in \mathbb{R}_\varepsilon^2$ berlaku :

a. $u^{\bullet} = (\ominus u)^{\bullet} = (u^{\bullet})^{\bullet}$
b. $u \otimes v^{\bullet} = (u \otimes v)^{\bullet}$
c. $\ominus (\ominus u) = u$
d. $\ominus (u \oplus v) = (\ominus u) \oplus (\ominus v)$
e. $\ominus (u \otimes v) = (\ominus u) \otimes v$ □

Definisi 2.5 [3] Diberikan $u = (x, y), v = (w, z) \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}$. Elemen u dikatakan setimbang (*balance*) terhadap v, dinotasikan dengan $u \nabla v$, jika $x \oplus z = y \oplus w$. □

Berdasarkan Definisi 2.5, tampak bahwa relasi setimbang dapat dipandang analog dengan kesamaan pada bilangan rasional. Meskipun demikian, kedua konstruksi tersebut ada perbedaan. Dari kesamaan dua bilangan rasional dapat dibentuk relasi ekuivalensi, sedangkan berbeda dengan relasi setimbang yang dimaksud di dalam Definisi 2.5.

Lemma 2.6 Relasi setimbang ∇ bersifat refleksif dan simetris tetapi relasi setimbang ∇ tidak transitif. □

Karena relasi setimbang bukan relasi ekuivalensi maka tidak dapat digunakan untuk mendefinisikan himpunan faktor (*the quotient set*) dari $\mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}$ oleh ∇. Selanjutnya, untuk $u = (x,y) \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}$ dan $v = (w,z) \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}$, suatu relasi $\mathcal{B}$ didefinisikan sebagai berikut

$$(x, y)\, \mathcal{B}\, (w, z) \iff \begin{cases} (x, y) \nabla (w, z) \text{ jika } x \neq y \text{ dan } w \neq z \\ (x, y) = (w, z) \text{ untuk lainnya} \end{cases} . \tag{2.1}$$

Lemma 2.7 [3] Relasi $\mathcal{B}$ pada (2.1) merupakan relasi ekuivalensi pada $\mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}$. □

Karena $\mathcal{B}$ merupakan relasi ekuivalensi, maka dapat dibentuk kelas-kelas ekuivalensi yang dibangun oleh $\mathcal{B}$. Kelas-kelas ekuivalensi pada $\mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}$ yang dibangun oleh relasi $\mathcal{B}$ membentuk himpunan $\mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}/_{\mathcal{B}}$. Selanjutnya, ditetapkan himpunan $\mathbb{S} := \mathbb{R}_{\varepsilon}^{2}/_{\mathcal{B}}$ dan dilengkapi oleh operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbb{S}$ sebagai berikut

$\overline{(a, b)} \oplus \overline{(c, d)} = \overline{(a \oplus c, b \oplus d)}$
$\overline{(a, b)} \otimes \overline{(c, d)} = \overline{(a \otimes c \oplus b \otimes d, a \otimes d \oplus b \otimes c)}$

Selanjutnya, struktur $(\mathbb{S}, \oplus, \otimes)$ disebut aljabar maks-plus tersimetri, dan dibedakan tiga kelas ekuivalensi yang dibangun oleh $\mathcal{B}$ sebagai berikut :

1. $\overline{(t, \varepsilon)} = \{(t, x) \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{2} | x < t\}$ disebut positif maks-plus, dinotasikan $\mathbb{S}^{\oplus}$.
2. $\overline{(\varepsilon, t)} = \{(x, t) \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{2} | x < t\}$ disebut negatif maks-plus, dinotasikan $\mathbb{S}^{\ominus}$.
3. $\overline{(t, t)} = \{(t, t) \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{2} | x < t\}$ disebut setimbang (*balance*), dinotasikan $\mathbb{S}^{\bullet}$.

Berikut ini diberikan contoh terkait paparan di atas.

Contoh 2.8

1. Elemen-elemen (5,2) dan (5,1) merupakan anggota dari $\overline{(5, \varepsilon)}$.
2. Diberikan $(3,0) \in \overline{(3, \varepsilon)}$, $(2,5) \in \overline{(\varepsilon, 5)}$. Maka diperoleh $(3,0) \oplus (2,5) = (3,5) \in \overline{(\varepsilon, 5)}$. Hal ini berlaku untuk sebarang $(x, y) \in \overline{(3, \varepsilon)}$ dan $(w, z) \in \overline{(\varepsilon, 5)}$. Akibatnya, $(x, y) \oplus (w, z) \in \overline{(\varepsilon, 5)}$. Jadi, $\overline{(3, \varepsilon)} \oplus \overline{(\varepsilon, 5)} = \overline{(\varepsilon, 5)}$ atau dapat ditulis singkat $3 \oplus (\ominus 5) = (\ominus 3)$.
3. Dari operasi $\oplus$, diperoleh $2 \oplus (\ominus 3) = \overline{(2, \varepsilon)} \oplus \overline{(\varepsilon, 3)} = \overline{(2,3)} = \overline{(\varepsilon, 3)} = \ominus 3$.

Dari kelas ekuivalensi di atas, diperoleh $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{\oplus} \cup \mathbb{S}^{\ominus} \cup \mathbb{S}^{\bullet}$. Keanggotaan dalam himpunan $\mathbb{S}$ yang semula dinyatakan dalam pasangan bilangan, selanjutnya dinyatakan sebagai keanggotaan dalam himpunan $\mathbb{R}_{\varepsilon}$, sehingga untuk $a \in \mathbb{R}_{\varepsilon}$:

$a = \overline{(a, \varepsilon)}$ dengan $\overline{(a, \varepsilon)} \in \mathbb{S}^{\oplus}$

$\ominus a = \ominus \overline{(a,\varepsilon)} = \overline{\ominus (a,\varepsilon)} = \overline{(\varepsilon,a)}$ dengan $\overline{(\varepsilon,a)} \in \mathbb{S}^{\ominus}$

$$a^{\bullet} = a \ominus a = \overline{(a,a)} \in \mathbb{S}^{\bullet}$$

Matriks atas Aljabar Maks-Plus Tersimetri

Karena elemen dari aljabar maks-plus tersimetri mempunyai invers, maka dapat dikembangkan operasi-operasi baris elementer pada suatu matriks atas aljabar maks-plus tersimetri.

Definisi 3.1 Tiga tipe operasi baris elementer pada matriks A atas aljabar maks-plus tersimetri, yaitu
1. Mempertukarkan baris ke$-i$ dan baris ke$-j$.
2. Mengalikan baris ke$-i$ dengan konstanta k yang tidak setimbang dengan ε.
3. Menambahkan k kali baris ke$-i$ dengan baris ke$-j$ untuk $i \neq j$. □

Adapun yang dimaksud dengan konstanta $k = (k_1, k_2)$ yang tidak setimbang dengan $\varepsilon = (\varepsilon, \varepsilon)$ yaitu memenuhi $k_1 \oplus \varepsilon \neq k_2 \oplus \varepsilon$. Matriks identitas $n \times n$ atas aljabar maks-plus tersimetri adalah E_n dengan

$$[E_n]_{ij} = \begin{cases} 0, jika\ i = j \\ \varepsilon, jika\ i \neq j \end{cases}.$$

Definisi 3.2 Suatu matriks elementer adalah matriks $n \times n$ yang diperoleh dari matriks identitas E_n dengan melakukan suatu operasi baris elementer tunggal. □

Menurut Definisi 3.2, jika E matriks elementer atas aljabar maks-plus tersimetri dan $A \in M_{m\times n}(\mathbb{S})$ maka $E \otimes A$ adalah matriks yang diperoleh dari operasi baris elementer pada matriks A. Elemen atas aljabar maks-plus tersimetri mempunyai invers terhadap $\oplus$ dan operasi baris elementer juga berlaku pada matriks atas aljabar maks-plus tersimetri, oleh karena itu dapat dikembangkan bentuk eselon baris yang diberikan dalam definisi berikut.

Definisi 3.3 Suatu matriks atas aljabar maks-plus tersimetri dikatakan mempunyai bentuk eselon baris jika memenuhi kondisi berikut :
1. Jika ada suatu baris yang tidak seluruh entri-nya setimbang dengan ε, maka entri pertama yang tak setimbang dengan ε pada baris tersebut adalah unsur 0. Selanjutnya, disebut 0 utama.
2. Jika ada baris-baris yang seluruh entri-nya setimbang dengan ε, maka baris-baris ini berada di bagian bawah matriks.
3. Pada dua baris berurutan yang seluruh entri-nya tidak setimbang dengan ε, 0 utama di dalam baris yang lebih bawah terletak di sebelah kanan 0 utama di dalam baris yang lebih atas.

Contoh 3.4 Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} \ominus 2 & 1^{\bullet} & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \ominus 0 \\ 1 & 0^{\bullet} & 1 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Akan ditentukan bentuk eselon baris dari matriks A tersebut. Berikut ini merupakan serangkaian operasi baris elementer pada matriks A.

$$\begin{bmatrix} \ominus 2 & 1^{\bullet} & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \ominus 0 \\ 1 & 0^{\bullet} & 1 & \varepsilon \end{bmatrix} \underset{\sim}{H_{1(\ominus(-2))}} \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{\bullet} & \varepsilon & \ominus(-2) \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \ominus 0 \\ 1 & 0^{\bullet} & 1 & \varepsilon \end{bmatrix} \underset{\sim}{H_{31(\ominus 1)}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & (-1)^{\bullet} & \varepsilon & \ominus(-2) \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \ominus 0 \\ 1^{\bullet} & 0^{\bullet} & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{H_{2(-1)}} \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{\bullet} & \varepsilon & \ominus(-2) \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \ominus(-1) \\ 1^{\bullet} & 0^{\bullet} & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{H_{32(0)}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & (-1)^{\bullet} & \varepsilon & \ominus(-2) \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \ominus(-1) \\ 1^{\bullet} & 0^{\bullet} & 1 & (-1)^{\bullet} \end{bmatrix} \overset{H_{3(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{\bullet} & \varepsilon & \ominus(-2) \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \ominus(-1) \\ 0^{\bullet} & (-1)^{\bullet} & 0 & (-2)^{\bullet} \end{bmatrix}.$$

Diperoleh $E_A = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{\bullet} & \varepsilon & \ominus(-2) \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \ominus(-1) \\ 0^{\bullet} & (-1)^{\bullet} & 0 & (-2)^{\bullet} \end{bmatrix}$ merupakan bentuk eselon baris dari matriks A.

Suatu matriks elementer mempunyai invers yang juga merupakan matriks elementer. Hal tersebut dinyatakan dalam lemma berikut.

Lemma 3.5. Setiap invers dari suatu matriks elementer merupakan matriks elementer.

Bukti :

Diberikan E matriks elementer yang diperoleh dari matriks identitas E_n melalui satu operasi baris elementer. Tanpa kehilangan keumuman bukti, diambil salah satu operasi baris dan dikerjakan pada matriks E_n, yaitu $E = E_n \oplus \alpha \otimes e_i \otimes e_j^T \otimes E$ dengan e_i menyatakan kolom ke$-i$ dari matriks E_n. Selanjutnya, terdapat $E_0 = E_n \oplus \ominus \alpha \otimes e_i \otimes e_j^T \otimes E$ sehingga memenuhi

$\left(E_n \oplus \alpha \otimes e_i \otimes e_j^T \otimes E\right) \otimes \left(E_n \oplus \ominus \alpha \otimes e_i \otimes e_j^T \otimes E\right) \nabla E_n$.

Hal ini berarti $E \otimes E_0 \nabla \mathrm{E_n}$. Secara analog dapat diperoleh $E_0 \otimes E \nabla \mathrm{E_n}$. Dengan demikian setiap invers dari suatu matriks elementer merupakan matriks elementer. ■

Berdasarkan lemma di atas, suatu matriks invertibel merupakan hasilkali matriks-matriks elementer seperti dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 3.6. Jika A matriks invertibel maka terdapat serangkaian matriks elementer $E_1, E_2, \ldots, E_k$ dengan $A \nabla\, E_1 \otimes E_2 \otimes \ldots \otimes E_k$. □

Determinan Matriks atas Aljabar Maks-Plus Tersimetri

Karena elemen dari aljabar maks-plus tersimetri mempunyai invers, maka dapat didefinisikan determinan suatu matriks atas aljabar maks-plus tersimetri.

Definisi 4.1. ([2]) Diberikan matriks $A = \left(a_{ij}\right) \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$. Determinan A didefinisikan sebagai

$$\det(A) = \bigoplus_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \right)$$

dengan S_n himpunan semua permutasi dari $\{1, 2, \ldots, n\}$, dan

$$sgn(\sigma) = \begin{cases} 0, jika\ \sigma\ permutasi\ genap \\ \ominus 0, jika\ \sigma\ permutasi\ ganjil \end{cases}.$$ □

Contoh 4.2 Diberikan $\begin{bmatrix} \ominus 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2^{\bullet} & \ominus 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$ dan $\mathcal{X}_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$ dengan

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan Definisi 4.1, diperoleh

$$\det(A) = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{X}_3} sgn(\sigma) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{3} A_{i\sigma(i)} \right)$$
$$= sgn(\sigma_1) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{3} A_{i\sigma_1(i)} \right) \oplus sgn(\sigma_2) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{3} A_{i\sigma_2(i)} \right) \oplus \ldots \oplus sgn(\sigma_6) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{3} A_{i\sigma_6(i)} \right)$$

$$= e \otimes \left(A_{1\sigma_1(1)} \otimes A_{2\sigma_1(2)} \otimes A_{3\sigma_1(3)}\right) \oplus\ominus e \otimes \left(A_{1\sigma_2(1)} \otimes A_{2\sigma_2(2)} \otimes A_{3\sigma_2(3)}\right)$$
$$\oplus \ldots \oplus e \otimes \left(A_{1\sigma_6(1)} \otimes A_{2\sigma_6(2)} \otimes A_{3\sigma_6(3)}\right)$$
$$= (A_{11} \otimes A_{22} \otimes A_{33}) \ominus (A_{12} \otimes A_{21} \otimes A_{33}) \oplus (A_{12} \otimes A_{23} \otimes A_{31}) \ominus$$
$$(A_{13} \otimes A_{22} \otimes A_{31}) \oplus (A_{13} \otimes A_{21} \otimes A_{32}) \ominus (A_{11} \otimes A_{23} \otimes A_{32})$$
$$= (\ominus 2 \otimes 2^{\bullet} \otimes \varepsilon) \ominus (1 \otimes 0 \otimes \varepsilon) \oplus (1 \otimes\ominus 0 \otimes 0) \ominus (0 \otimes 2^{\bullet} \otimes 0)$$
$$\oplus (0 \otimes 0 \otimes \varepsilon) \ominus (0 \otimes 2^{\bullet} \otimes \varepsilon)$$
$$= \varepsilon \ominus \varepsilon \oplus\ominus 1 \ominus 2^{\bullet} \oplus \varepsilon \ominus \varepsilon = 2^{\bullet}.$$

Oleh karena di dalam struktur aljabar maks-plus tersimetri dapat didefinisikan elemen negatif, maka untuk matriks atas aljabar maks-plus tersimetri, dua baris yang dipertukarkan mempunyai sifat berikut.

Lemma 4.3. Diberikan $A = \left(a_{ij}\right) \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$ dengan $\mathbb{S}$ aljabar maks-plus tersimetri. Jika $B = \left(b_{ij}\right) \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$ diperoleh dari A dengan mempertukarkan dua baris, maka $\det(B) = \ominus \det(A)$. □

Selain itu, juga diperoleh sifat-sifat lain determinan matriks atas aljabar maks-plus tersimetri berdasarkan operasi baris elementer, seperti dalam beberapa lemma berikut.

Lemma 4.4. Diberikan $A = \left(a_{ij}\right) \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$ dengan $\mathbb{S}$ aljabar maks-plus tersimetri. Jika $B = \left(b_{ij}\right) \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$ diperoleh dari A dengan mengalikan suatu baris dengan konstanta k yang tidak setimbang dengan ε maka $det(B) = k \otimes det(A)$. □

Lemma 4.5. Jika A matriks persegi atas aljabar maks-plus tersimetri mempunyai dua baris yang sama maka $det(A) \nabla \varepsilon$. □

Lemma 4.6. Diberikan $A = \left(a_{ij}\right) \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$ dengan $\mathbb{S}$ aljabar maks-plus tersimetri. Jika $B = \left(b_{ij}\right) \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$ diperoleh dengan menambahkan k kali baris ke$-m$ dengan baris ke$-l$ dari matriks A untuk $l \neq m$ maka $det(B) = det(A)$. □

Untuk suatu matriks yang diperoleh dari matriks lain melalui operasi baris elementer tunggal, diperoleh sifat sebagai berikut, yang mempunyai peranan dalam mengkonstruksikan invers dari suatu matriks atas aljabar maks-plus tersimetri.

Lemma 4.7. Jika A matriks atas aljabar maks-plus tersimetri dan E matriks elementer maka $\det(E \otimes A) = \det(E) \otimes \det(A)$.
Bukti :
Akan ditinjau untuk ketiga tipe dalam operasi baris elementer. Misalkan E matriks elementer yang diperoleh dengan mempertukarkan baris ke$-i$ dengan baris ke$-j$ pada matriks E_n, maka menurut Lemma 4.3 diperoleh $\det(E) = \ominus \det(E_n) = \ominus 0$. Akibatnya, karena $det(E \otimes A) = \ominus det(A)$ maka $det(E \otimes A) = \ominus det(A) = \ominus 0 \otimes \det(A) = \det(E) \otimes \det(A)$. Misalkan E matriks elementer yang diperoleh dengan mengalikan baris ke$-i$ dengan k yang bukan ε pada matriks E_n maka menurut Lemma 4.4 diperoleh $\det(E) = k \otimes \det(E_n) = k \otimes 0 = k$. Akibatnya, karena $\det(E \otimes A) = k \otimes \det(A)$ maka $\det(E \otimes A) = \det(E) \otimes \det(A)$. Misalkan E matriks elementer yang diperoleh dengan menambahkan k kali baris ke$-m$ dengan baris ke$-l$ dari matriks E_n untuk $l \neq m$, maka menurut Lemma 4.6 diperoleh $\det(E) = det(E_n) = 0$. Akibatnya,
$\det(E \otimes A) = \det(A) = 0 \otimes \det(A) = \det(E) \otimes \det(A)$. ■

Selanjutnya, untuk determinan dari hasilkali dua matriks atas aljabar maks-plus tersimetri berlaku sifat sebagai berikut.
Teorema 4.8. Untuk $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$, berlaku $\det(A \otimes B) \nabla \det(A) \otimes \det(B)$.
Bukti :
Misalkan A tidak invertibel, berakibat $\det(A) \nabla \varepsilon$. Akibatnya, $\det(A \otimes B) \nabla \varepsilon$.

Misalkan A invertibel. Menurut Teorema 3.5 terdapat serangkaian matriks elementer $E_1, E_2, \ldots, E_k$ dengan $A \nabla E_1 \otimes E_2 \otimes \ldots \otimes E_k$. Selanjutnya

$$\begin{aligned} det(A \otimes B) &\nabla \det(E_1 \otimes E_2 \otimes \ldots \otimes E_k \otimes B) \\ &\nabla \det(E_1) \otimes \det(E_2) \otimes \ldots \otimes \det(E_k) \otimes \det(B) \\ &\nabla \det(E_1 \otimes E_2 \otimes \ldots \otimes E_k) \otimes \det(B) \end{aligned}$$

Diperoleh, $\det(A \otimes B) \nabla \det(\mathrm{A}) \otimes \det(\mathrm{B})$. ■

Berdasarkan lemma dan teorema yang sudah diperoleh di atas, maka dapat diselidiki hubungan antara determinan dan adjoin matriks atas aljabar maks-plus tersimetri seperti diberikan dalam lemma berikut.

Lemma 4.9. Diberikan aljabar maks-plus tersimetri $\mathbb{S}$ dengan elemen nol ε dan elemen identitas 0. Untuk $A \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$ diperoleh

$$[\det(A) \otimes E_n] \nabla [\mathrm{A} \otimes \mathrm{adj}(\mathrm{A})] \nabla [\mathrm{adj}(\mathrm{A}) \otimes \mathrm{A}].$$

Bukti :

Diperhatikan

$$\det(A) \otimes E_n = \begin{cases} \varepsilon, jika\ i \neq j \\ \det(A)\ , jika\ i = j \end{cases}$$

Diperhatikan $A \otimes adj(A) = (A \otimes adj(A))_{ij}$ dengan

$$\begin{aligned} (A \otimes adj(A))_{ij} &= \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes (adj(A))_{kj} = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes (\ominus 0)^{\otimes^{k+j}} \otimes |A(j,k)| \\ &= \bigoplus_{k=1}^{n} (\ominus 0)^{\otimes^{k+j}} a_{ik} \otimes |A(j,k)| \end{aligned}$$

Untuk $i = j$ dipunyai

$$(A \otimes adj(A))_{n} \bigoplus_{k=1}^{n} (\ominus 0)^{\otimes^{k+j}} a_{ik} \otimes |A(j,k)| = \det(A)$$

Untuk $i \neq j$. Misalkan $B \in M_{n\times n}(\mathbb{S})$ adalah matriks sedemikian sehingga baris ke$-j$ dari B sama dengan baris ke$-i$ dari A dan baris-baris yang lain dari B sama dengan baris-baris pada A.

Dari sini $b_{jk} = a_{ik}$ untuk $1 \leq k \leq n$. Akibatnya, diperoleh

$$\varepsilon \nabla \det(B) = \bigoplus_{k=1}^{n} (\ominus 0)^{\otimes^{j+k}} \otimes b_{jk} \otimes |B(j,k)|$$

$$\varepsilon \nabla \det(B) = \bigoplus_{k=1}^{n} (\ominus 0)^{\otimes^{j+k}} \otimes a_{jk} \otimes |A(j,k)|$$

$$\varepsilon \nabla \det(B) = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes \left((\ominus 0)^{\otimes^{j+k}} \otimes |A(j,k)|\right)$$

$$\varepsilon \nabla \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes (adj(A))_{kj}, i \neq j$$

$$\varepsilon \nabla \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes (adj(A))_{kj}$$

$$\varepsilon \nabla \bigoplus_{k=1}^{n} (A \otimes adj(A))_{ij}$$

Sehingga diperoleh $(A \otimes adj(A))_{ij} \nabla\, \varepsilon$ jika $i \neq j$ dan $(A \otimes adj(A))_{ij} = \det(A)$ jika $i \neq j$. Analog dengan cara tersebut, diperoleh $(adj(A) \otimes A)_{ij} \nabla\, \varepsilon$ jika $i \neq j$ dan $(adj(A) \otimes A)_{ij} = \det(A)$ jika $i \neq j$. Akibatnya, diperoleh $[\det(A) \otimes E_n] \nabla [\mathrm{A} \otimes \mathrm{adj}(\mathrm{A})] \nabla [\mathrm{adj}(\mathrm{A}) \otimes \mathrm{A}]$. ■

Lemma 4.9 yang menyatakan hubungan antara determinan dan adjoin matriks atas aljabar maks-plus tersimetri, dapat diperoleh karena karakteristik elemen-elemen di dalam aljabar maks-plus tersimetri yang berbeda dengan karakteristik elemen-elemen di dalam aljabar maks-plus.

DAFTAR RUJUKAN

Baccelli, F., et al. 2001. *Synchronization and Linearity*. New York : John Wiley & Sons.

De Schutter, B. , 1996. *Max-Algebraic System Theory for Discret Event Systems*, PhD thesis Departement of Electrical Enginering Katholieke Universiteit Leuven, Leuven.

De Schutter, B. and De Moor, B., 2002. "*The QR decomposition and the singular value decomposition in the symmetrized max-plus algebra revisited*," *SIAM Review*, vol. 44, no. 3, pp. 417–454.

Poplin, Philip L. 2000. *The Semiring of Multisets.* A thesis submitted to the Graduate Faculty of North Caroline State University

Singh, D., Ibrahim, M., and Singh, J.N., 2008. A Note on Symmetrized Max-Plus Algebra. Journal of Mathematical Sciences and Mathematics Education. Vol. 5. No.1.